



**Уральский
федеральный
университет**

имени первого Президента
России Б.Н.Ельцина

**Институт радиоэлектроники
и информационных
технологий**

А. В. БЛОХИН

ЭЛЕКТРОТЕХНИКА

Учебное пособие

Министерство образования и науки Российской Федерации
Уральский федеральный университет
имени первого Президента России Б. Н. Ельцина

А. В. Блохин

ЭЛЕКТРОТЕХНИКА

*Рекомендовано учебно-методическим советом УрФУ
в качестве **учебного пособия** для студентов, обучающихся
по направлениям подготовки 550500 – *Металлургия*,
551800 – *Машиностроительные технологии и оборудование**

Екатеринбург
Издательство Уральского университета
2014

УДК 621.3
ББК 31.2
Б70

Рецензенты:

кафедра «Автоматизация технологических процессов и систем» НТТИ
(зав. кафедрой канд. техн. наук, доц. В. А. Иванушкин);
канд. техн. наук, доц. Н. В. Будылдина (УрТИСИ ГОУ ВПО «СибГУТИ»)
Научный редактор – д-р техн. наук, проф. Ф. Н. Сарапулов

Блохин, А. В.

Б70 Электротехника : учебное пособие / А. В. Блохин. – 2-е изд., испр. –
Екатеринбург : Изд-во Урал. ун-та, 2014. – 184 с.
ISBN 978-5-7996-1090-6

Учебное пособие соответствует Государственному стандарту дисциплины «Электротехника» для студентов высших учебных заведений. Содержит теоретический материал об электрических колебаниях и их свойствах, методах расчета электрических цепей. В ней рассмотрены нелинейные и трехфазные цепи, трансформаторы, электрические машины постоянного и переменного тока.

Предназначено для студентов неэлектротехнических специальностей высших учебных заведений, изучающих курс «Электротехника».

Библиогр.: 9 назв. Табл. 4. Рис. 81.

УДК 621.3
ББК 31.2

Учебное издание

Блохин Анатолий Васильевич

ЭЛЕКТРОТЕХНИКА

Подписано в печать 23.12.2013. Формат 60×90 1/16. Плоская печать.

Усл. печ. л. 10,74. Уч.-изд. л. 10,0. Тираж 50 экз. Заказ № 84.

Редакционно-издательский отдел ИПЦ УрФУ
620049, Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 5
Тел.: 8(343)375-48-25, 375-46-85, 374-19-41
E-mail: rio@urfu.ru

Отпечатано в Издательско-полиграфическом центре УрФУ
620000, Екатеринбург, ул. Тургенева, 4
Тел.: 8(343) 350-56-64, 350-90-13
Факс: 8(343) 358-93-06
E-mail: press-urfu@mail.ru

ISBN 978-5-7996-1090-6

© Уральский федеральный университет, 2010

© А. В. Блохин, 2010

© Уральский федеральный университет, 2014

ВВЕДЕНИЕ

Электротехникой, как известно, называют область науки и техники, связанную с производством и использованием электрической энергии. Электрические явления, приборы, устройства, машины, аппараты и системы проникли во все области практической деятельности человека – в народное хозяйство, промышленность, научные исследования, быт, культуру. В связи с этим электротехника включена в учебные планы неэлектрических специальностей, в том числе и технических и технологических специальностей и направлений подготовки системы высшего профессионального образования.

В настоящем учебном пособии излагаются сведения об электрических колебаниях и их свойствах, методах расчета электрических цепей при постоянном токе и гармоническом воздействии, рассмотрены нелинейные и трехфазные цепи, трансформаторы, электрические машины постоянного и переменного тока.

В системе очно-заочной бакалаврской и магистерской подготовки большое, если не главное, значение имеет самостоятельная работа. Использование при этом «объемных» академических изданий, предназначенных в основном для студентов электротехнических специальностей, вызывает определенные трудности при изучении. В связи с этим данное учебное пособие ориентировано на минимум информации с учетом того, что для углубленного самостоятельного изучения отдельных вопросов будут использоваться академические издания, имеющиеся в списке литературы, на которые в тексте приведены ссылки.

Основной задачей изучения электротехники студентами неэлектротехнических направлений подготовки специалистов является ознакомление с законами протекания электрического тока, основными физическими процессами, имеющими место в электрических цепях, устройствах, аппаратах, системах, на уровне, необходимом для составления технического задания на проектирование и расчет электрической части оборудования для инженера-электрика. Более простые технические задачи, как например, выбор типа и мощности электродвигателя, выбор типа и сечения проводов и кабелей, студент, изучивший данный курс, должен решать самостоятельно.

Глава 1

ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ И ИХ СВОЙСТВА

1.1. Классификация электрических колебаний

Колебанием в физике называют любой процесс, меняющийся во времени: $x(t) \neq \text{const}$, при $-\infty \leq t \leq \infty$. Для нас представляют интерес электрические колебания, к которым относятся колебания напряжения, силы электрического тока, мощности, энергии и других параметров и характеристик. В дальнейшем под термином колебания будем понимать электрические колебания.

Все колебания принято делить на детерминированные (или регулярные) и случайные. Детерминированным называют любое колебание, которое можно описать аналитически, т. е. представить математической формулой, мгновенное значение которого в любой момент времени можно предсказать с вероятностью единицы. Примером регулярных колебаний может быть напряжение в сети питания, последовательность импульсов, форма, величина и положение которых во времени известны.

Регулярные колебания подразделяют на периодические и непериодические (или одиночные). Периодическим называют любое колебание, для которого выполняется следующее условие:

$$s(t) = s(t + KT),$$

где K – любое целое число;

T – период колебания.

Простейшим периодическим регулярным колебанием является гармоническое колебание (напряжение, ток, заряд, напряженность поля), определяемое формулой

$$s(t) = A \cos(2\pi t/T + \theta) = A \cos(\omega t + \theta), \quad (1.1)$$

где A , T , θ и ω – постоянные амплитуда, период, угловая частота и начальная фаза колебания.

Строго говоря, гармоническое колебание называют монохроматическим, т. е. спектр такого колебания состоит из спектральной линии. У реальных колебаний, имеющих начало и конец, спектр неизбежно «размывается». В связи с этим в даль-

нейшем под гармоническим и монохроматическим колебанием будем подразумевать колебание, определяемое функцией (1.1).

Непериодическим регулярным колебанием называется колебание, для которого не выполняется условие $s(t) = s(t + KT)$. Примером таких колебаний могут быть единичные импульсы, отрывки гармонических колебаний. Именно этот тип колебаний преимущественно используется в практике.

К случайным колебаниям относятся такие, значения которых заранее неизвестны и могут быть предсказаны лишь с некоторой вероятностью, меньшей единицы. К таким колебаниям относятся, например, электрическое напряжение, соответствующее речи, музыке, шумы диодов и транзисторов, космические шумы.

По способу представления функции, описывающей колебание, и аргумента этой функции колебания разделяют на четыре категории:

- непрерывные или аналоговые (рис. 1.1, *а*);
- квантованные (рис. 1.1, *б*);
- дискретизированные (рис. 1.1, *в*);
- цифровые (рис. 1.1, *г*).

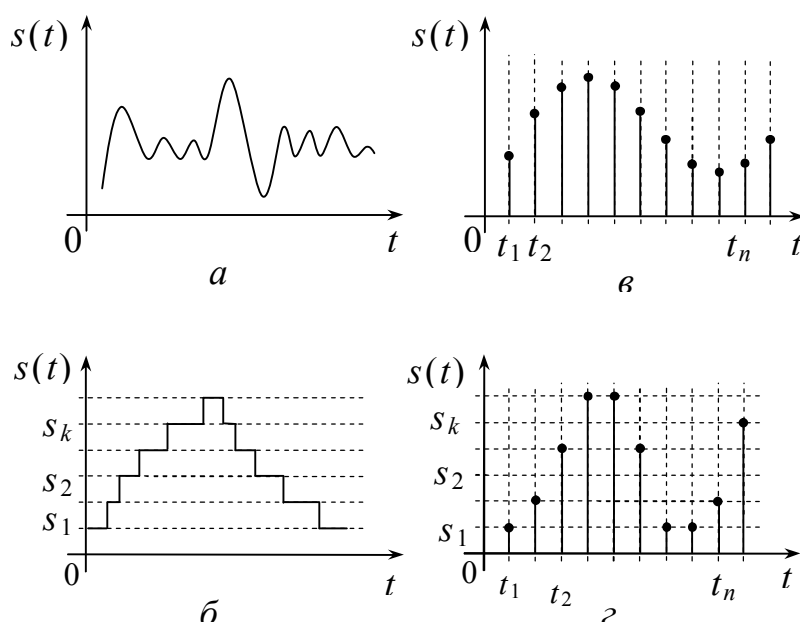


Рис. 1.1. Электрические колебания:
а – аналоговые; *б* – квантованные; *в* – дискретизированные;
г – цифровые

В первом случае функция $s(t)$ и аргумент этой функции t принимают непрерывный ряд значений в определенном интервале. Во втором случае функция принимает дискретный, а аргумент непрерывный ряд значений. В третьем случае, наоборот, функция имеет непрерывный, а аргумент дискретный ряд значений. В последнем случае и функция, и аргумент дискретны. Часто под термином «цифровое» понимают бинарное колебание, у которого два значения: ноль и единица (рис. 1.2).

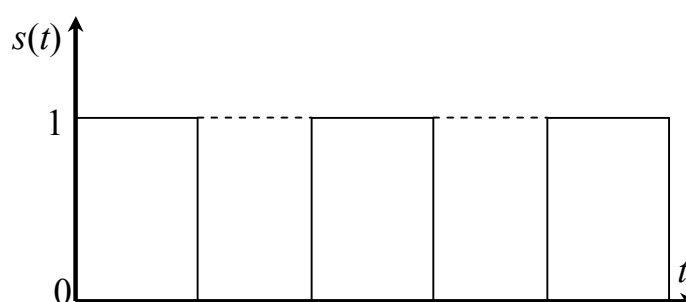


Рис. 1.2. Бинарное колебание

В информатике колебания несут в себе информацию, т. е. набор сведений о чем-либо. Информативными могут быть частота, амплитуда, фаза колебаний. Такие колебания называют сигналами. Колебания, не содержащие в себе какой-либо информации или разрушающие информацию в других колебаниях, называют помехами. Чаще всего сигналы – регулярные колебания, а помехи – случайные.

1.2. Разложение колебаний в ряд Фурье

Из математики известно, что любая периодическая функция $f(x)$ может быть разложена в ряд по системе функций $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ..., $\varphi_n(x)$ при условии, что эта система функций является ортогональной:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \varphi_n(x), \quad C_n = \frac{1}{\|\varphi_n\|^2} \int_a^b f(x) \varphi_n(x) dx ,$$

где C_n – коэффициенты, разложенные в ряд;

$$\|\varphi_n\| = \sqrt{\int_a^b \varphi_n^2(x) dx}.$$

Возьмем в качестве ортогональных функций систему тригонометрических функций, которые можно записать двумя способами:

I. $1, \cos(\omega, t), \sin(\omega, t), \cos(2\omega, t), \sin(2\omega, t), \dots, \cos(n\omega, t), \dots$

II. $\dots, e^{-jn\omega t}, \dots, e^{-j2\omega t}, e^{-j\omega t}, 1, e^{j\omega t}, e^{j2\omega t}, \dots, e^{jn\omega t}, \dots$

Во втором ряде функции синуса и косинуса видны из формул Эйлера:

$$\begin{cases} e^{jx} = \cos x + j \sin x, \\ e^{-jx} = \cos x - j \sin x. \end{cases} \quad (1.2)$$

Если взять систему ортогональных функций, записанную в форме II, получим комплексную форму записи ряда Фурье для периодического колебания $s(t)$:

$$\begin{cases} s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \dot{C}_n e^{jn\omega_1 t} \\ \dot{C}_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) e^{-jn\omega_1 t} dt \end{cases}, \quad (1.3)$$

где $\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$.

Если систему ортогональных функций взять в виде ряда I, то получим тригонометрическую форму записи ряда Фурье:

$$s(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2 \left| \dot{C}_n \right| \cos(n\omega_1 t + \theta_n). \quad (1.4)$$

Используя формулу Эйлера (1.2), коэффициент ряда Фурье \dot{C}_n можно представить как

$$\dot{C}_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \cos(n\omega_1 t) dt - j \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \sin(n\omega_1 t) dt = C_{nc} - jC_{ns},$$

где C_{nc} – косинусная составляющая коэффициента C_n ;

C_{ns} – синусная составляющая коэффициента C_n .

Причем

$$\dot{C}_n = \left| \dot{C}_n \right| e^{j\theta_n}, \quad \left| \dot{C}_n \right| = \sqrt{C_{nc}^2 + C_{ns}^2},$$

$$\theta_n = -\arctg \frac{C_{ns}}{C_{nc}}, \quad s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| \dot{C}_n \right| e^{j(n\omega_1 t + \theta_n)}.$$

Как видно из формулы (1.4), разложение в ряд Фурье позволяет любое колебание представить в виде совокупности постоянной составляющей C_0 и n гармоник, где $\left| \dot{C}_n \right|$ – амплитуды; $(n\omega_1)$ – частоты; θ_n – начальные фазы гармонических составляющих. При $n = 1$ имеем первую гармонику, при $n = 2$ – вторую гармонику и так далее.

1.3. Спектры колебаний

Спектром колебаний называют упорядоченное расположение по частоте комплексных амплитуд гармоник (рис. 1.3).

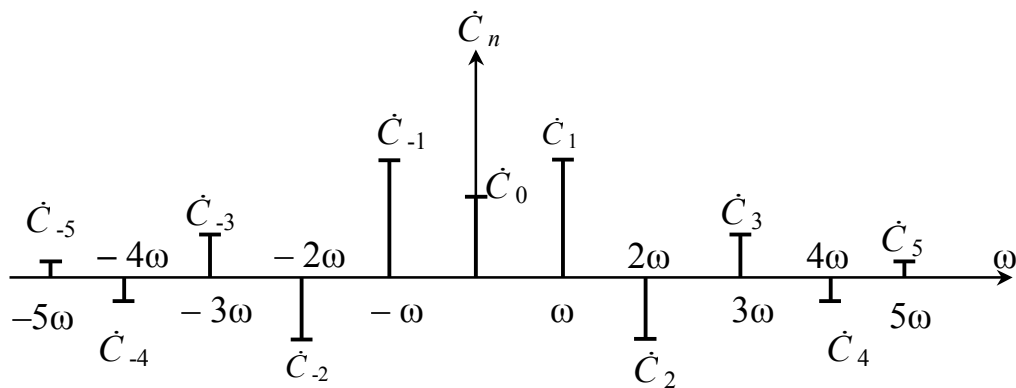


Рис. 1.3. Комплексный спектр

Чаще всего используют амплитудно-частотную и фазо-частотную характеристики, т.е. распределение по частоте модулей и аргументов комплексных коэффициентов ряда Фурье (рис. 1.4).

Из рис. 1.3 и 1.4 отчетливо видно, что спектры имеют дискретный или линейчатый вид. Это свойство спектров относится ко всем периодическим колебаниям.

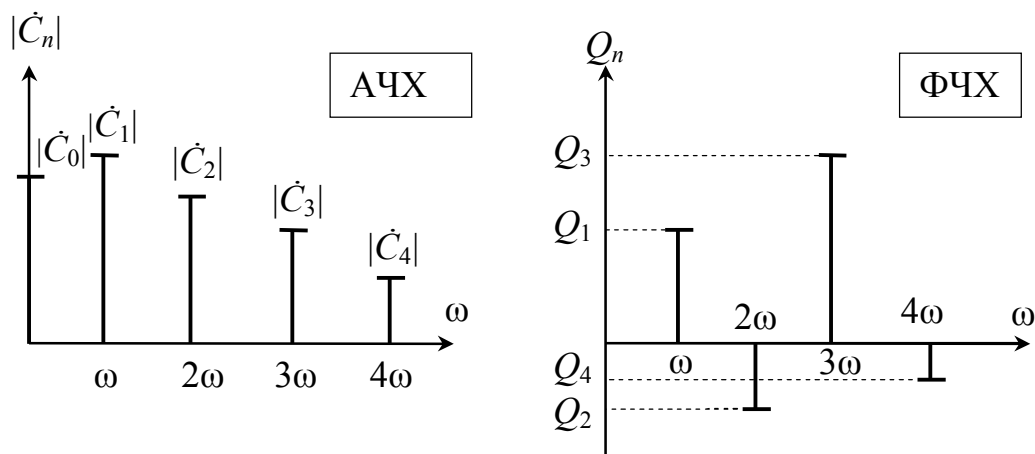


Рис. 1.4. Амплитудный и фазовый спектры

Вычислим спектр последовательности прямоугольных импульсов (рис. 1.5).

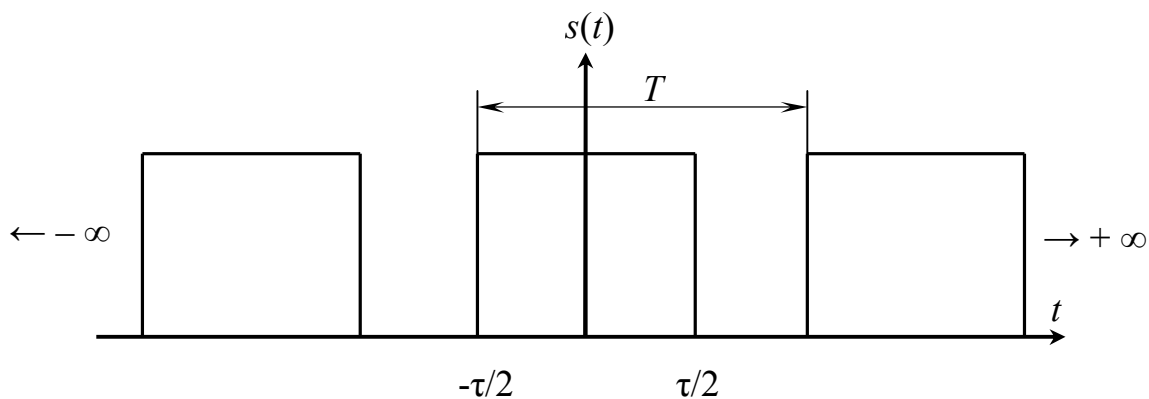


Рис. 1.5. Последовательность импульсов

Запишем аналитическую форму колебания $s(t)$ за один период:

$$s(t) = \begin{cases} E, & -\tau/2 \leq t \leq \tau/2 \\ 0, & t > \tau/2, t < -\tau/2 \end{cases}.$$

Вычислим постоянную составляющую из ряда Фурье:

$$C_0 = \frac{1}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} s(t) dt = \frac{1}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} E dt = \frac{E}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} dt = \frac{E\tau}{T}.$$

Вычислим значения коэффициентов \dot{C}_n :

$$\begin{aligned} \dot{C}_n &= \frac{1}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} E e^{-jn\omega_1 t} dt = -\frac{E}{Tj\omega_1 n} \left[e^{-jn\omega_1 \tau/2} - e^{jn\omega_1 \tau/2} \right] = \\ &= \frac{E\tau \sin(n\omega_1 \tau / 2)}{T (n\omega_1 \tau / 2)}. \end{aligned}$$

Запишем ряд Фурье:

$$s(t) = \frac{E\tau}{T} + \sum_{n=1}^{\infty} 2 \left| \frac{E\tau \sin(n\omega_1 \tau / 2)}{T (n\omega_1 \tau / 2)} \right| \cos(n\omega_1 t + \theta_n).$$

Построим спектр (рис. 1.6).

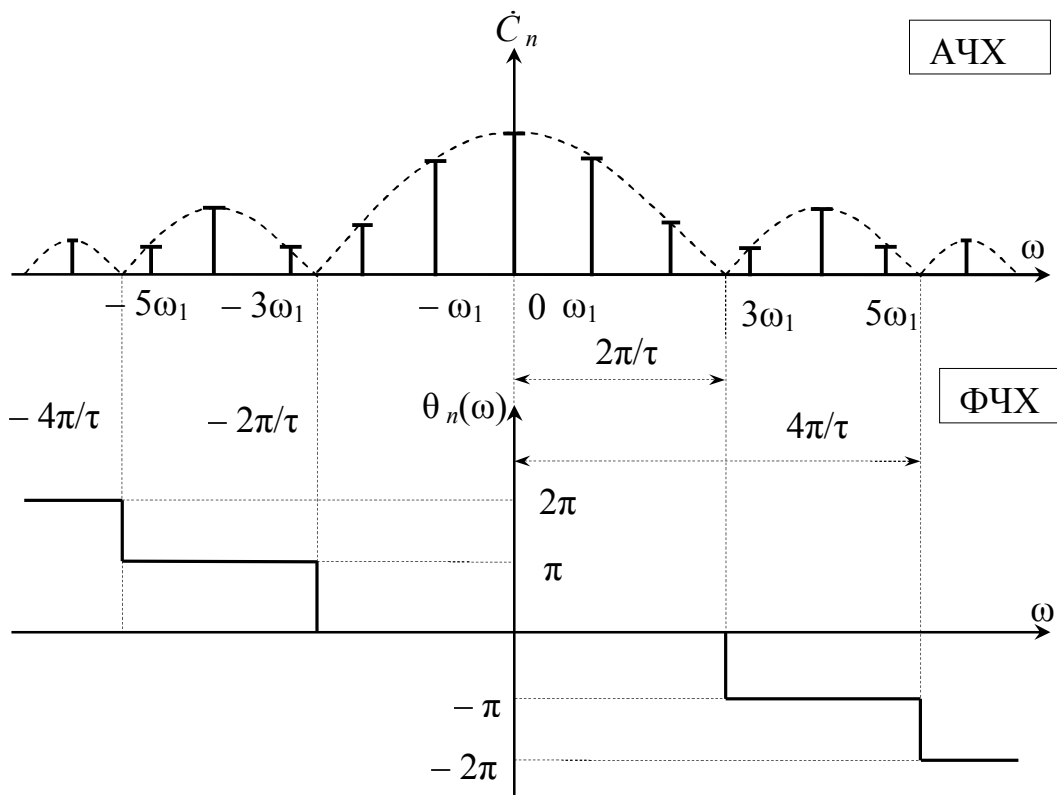


Рис. 1.6. Амплитудный и фазовый спектры последовательности прямоугольных импульсов

У одиночных колебаний в отличие от периодических спектр имеет совершенно другую форму: не дискретный, а сплошной вид и называется спектральной плотностью $\dot{S}(\omega)$:

$$\dot{S}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j\omega t} dt ,$$

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}(\omega) e^{j\omega t} d\omega .$$

Эти выражения называют соответственно прямым и обратным преобразованиями Фурье, связывающими спектральную плотность и колебание $s(t)$. Используя формулу Эйлера для спектральной плотности $\dot{S}(\omega)$, получим

$$\dot{S}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cos(\omega t) dt - j \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \sin(\omega t) dt = A(\omega) - jB(\omega) ,$$

$$\left| \dot{S}(\omega) \right| = \sqrt{A^2(\omega) + B^2(\omega)} , \quad \dot{S}(\omega) = \left| \dot{S}(\omega) \right| e^{j\theta(\omega)} ,$$

$$\theta(\omega) = -\operatorname{arctg} \frac{B(\omega)}{A(\omega)} .$$

Вычислим спектральную плотность одиночного импульса (рис. 1.7).

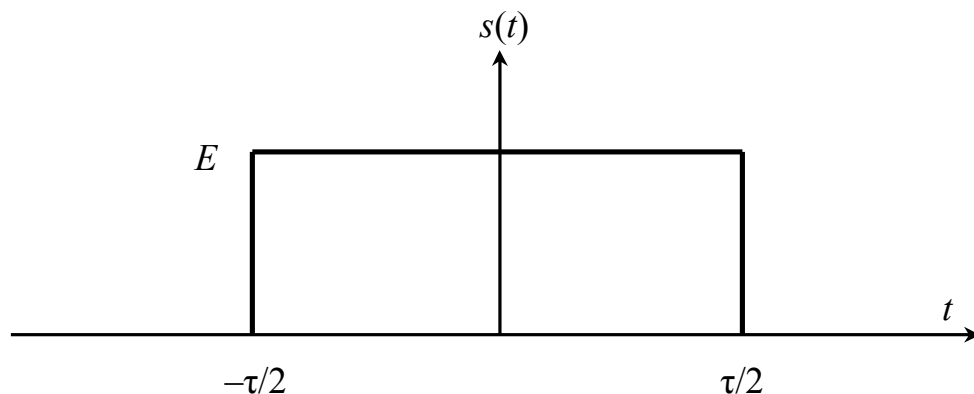


Рис. 1.7. Импульс прямоугольной формы

Запишем формулу колебания:

$$s(t) = \begin{cases} E, & -\tau/2 \leq t \leq \tau/2 \\ 0, & t > \tau/2, t \leq -\tau/2 \end{cases}.$$

Затем вычислим спектральную плотность $\dot{S}(\omega)$:

$$\dot{S}(\omega) = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} E e^{-j\omega t} dt = \frac{E}{j\omega} [e^{-j\omega\tau/2} - e^{j\omega\tau/2}] = E\tau \frac{\sin(\omega\tau/2)}{(\omega\tau/2)}.$$

Построим спектр (рис. 1.8).

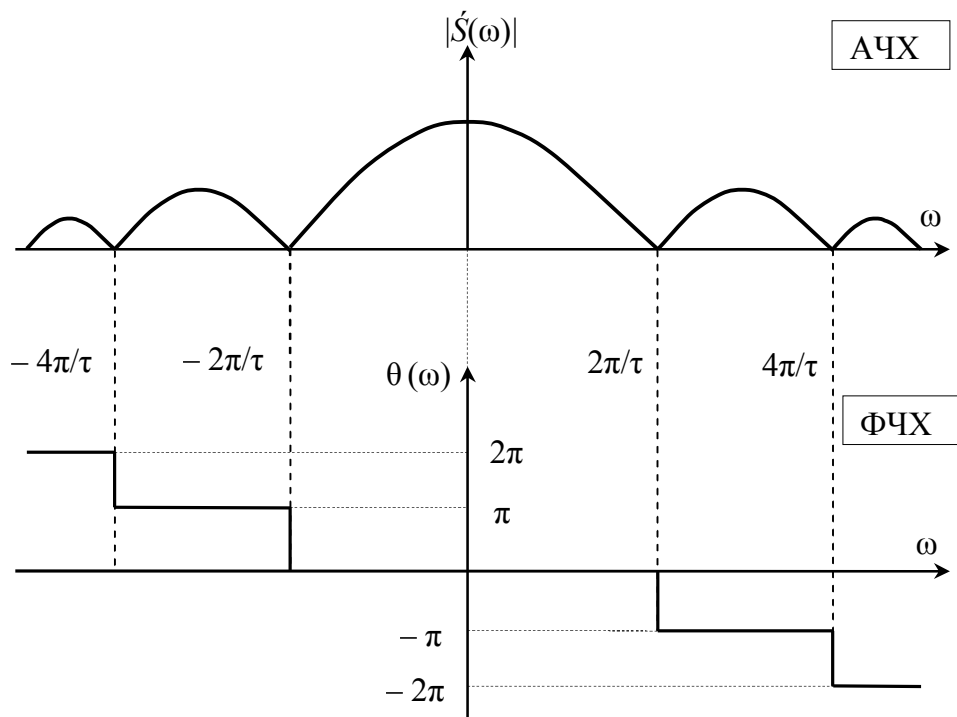


Рис. 1.8. Спектр одиночного прямоугольного импульса

Как видно из рис. 1.8, АЧХ совпадает по форме с огибающей спектра из рис. 1.6.

1.4. Свойства спектров

Между колебанием $s(t)$ и его спектром $\dot{S}(\omega)$ существует однозначное соответствие. Это соответствие одинаково как для пе-

риодических, так и одиночных колебаний, поэтому некоторые свойства спектров рассмотрим на примере одиночных колебаний.

1.4.1. Свойство линейности

Если колебание $s(t)$ представляет собой алгебраическую сумму других колебаний, то спектр такого колебания равен алгебраической сумме спектров суммируемых колебаний:

$$s(t) = \sum_{i=1}^N s_i(t); \quad \dot{S}(\omega) = \sum_{i=1}^N \dot{S}_i(\omega),$$

т. е. при суммировании колебаний складывают их спектры, при вычитании колебаний вычисляют разность их спектров.

1.4.2. Сдвиг колебаний во времени

Колебание $s_1(t)$ со спектром $\dot{S}_1(\omega)$ сдвинуто по оси времени вправо на интервал времени t_0 (рис. 1.9).

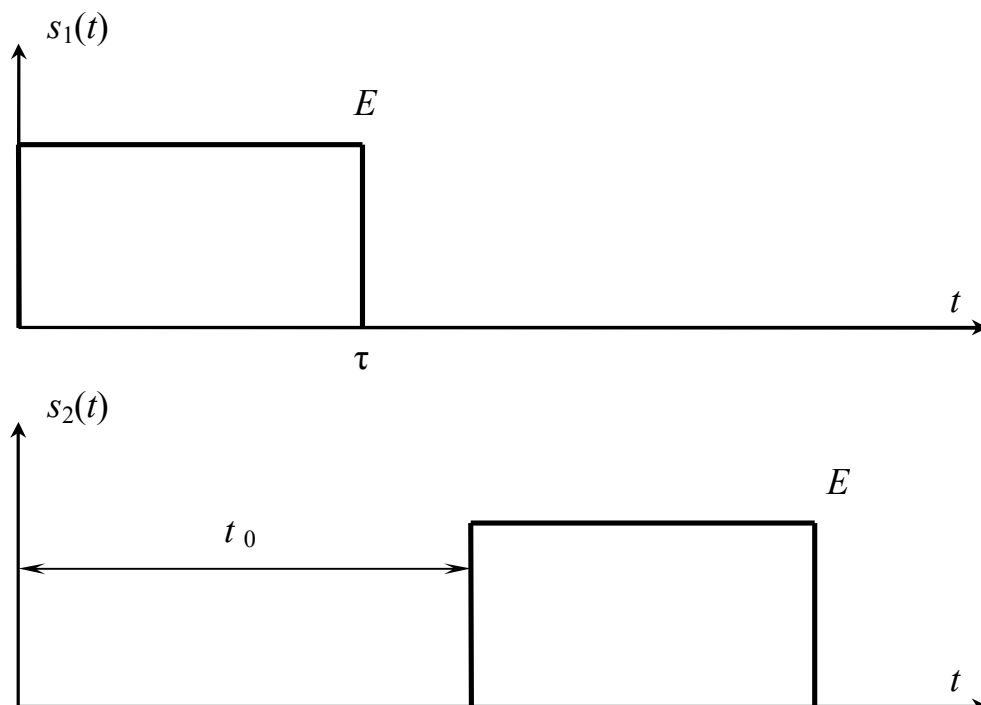


Рис. 1.9. Сдвиг колебания во времени

При этом $s_2(t) = s_1(t - t_0)$. Спектральная плотность колебания $s_2(t)$ при этом

$$\dot{S}_2(\omega) = \dot{S}_1(\omega) e^{-j\omega t_0},$$

т.е. модуль спектра при сдвиге колебания вправо не меняется, а меняется фазовая характеристика на величину $-\omega t_0$, при сдвиге влево – на величину $+\omega t_0$.

1.4.3. Свойства спектров четных и нечетных колебаний

Если колебание $s(t)$ описывается четной функцией своего аргумента, то спектр такого колебания всегда действительный, т. е. мнимые составляющие отсутствуют:

$$C_{ns} = 0, B(\omega) = 0.$$

Если колебание $s(t)$ описывает нечетная функция своего аргумента, то спектр такого колебания всегда мнимый, т. е. действительные составляющие спектра отсутствуют:

$$C_{nc} = 0, A(\omega) = 0.$$

Если колебание $s(t)$ представляет функция, не относящаяся ни к четным, ни к нечетным, то такое колебание имеет комплексный спектр, содержащий и действительную, и мнимые части спектра:

$$C_{nc} \neq 0, C_{ns} \neq 0, A(\omega) \neq 0, B(\omega) \neq 0.$$

1.4.4. Изменение масштаба времени

Пусть колебание $s_1(t)$, имеющее спектр $\dot{S}_1(\omega)$, сжато во времени (рис. 1.10) в n раз:

$$s_2(t) = s_1(nt) \text{ при } n > 1.$$

Тогда спектр колебания $s_2(t)$ будет равен

$$\dot{S}_2(\omega) = \left(\frac{1}{n}\right) \dot{S}_1\left(\frac{\omega}{n}\right),$$

т. е. модуль исходного колебания уменьшается в n раз, а полоса частот расширяется в n раз.

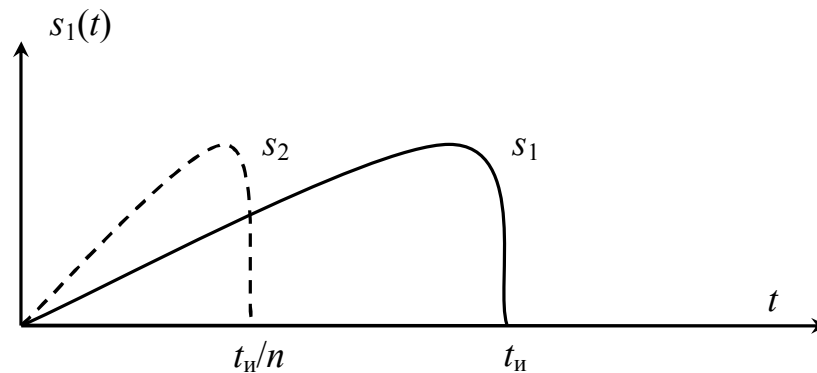


Рис. 1.10. Сжатие колебания во времени

При растяжении колебания будет наоборот – модуль увеличится, а полоса частот спектра уменьшится в n раз.

1.4.5. Дифференцирование и интегрирование колебания

Пусть колебание $s(t)$ имеет спектр $\dot{S}(\omega)$. При дифференцировании (взятии производной) колебания n раз спектр исходного колебания дополняется сомножителем $(j\omega)^n$:

$$\begin{aligned} s(t) &\rightarrow \dot{S}(\omega), \\ s'(t) &\rightarrow j\omega \dot{S}(\omega), \\ s^{(n)}(t) &\rightarrow (j\omega)^n \dot{S}(\omega). \end{aligned}$$

При интегрировании колебания n раз спектр исходного колебания дополняется сомножителем $\left(\frac{1}{j\omega}\right)^n$:

$$\begin{aligned} s(t) &\rightarrow \dot{S}(\omega), \\ \int s(t) dt &\rightarrow \frac{1}{j\omega} \dot{S}(\omega), \\ \int\int\int_n s(t) dt &\rightarrow \frac{1}{(j\omega)^n} \dot{S}(\omega). \end{aligned}$$

1.4.6. Произведение колебаний

Пусть имеются два колебания: $g(t)$ со спектром $\dot{G}(\omega)$ и $f(t)$ со спектром $\dot{F}(\omega)$. Тогда новое колебание $s(t) = g(t)f(t)$ будет иметь спектр $\dot{S}(\omega)$, определяемый сверткой спектров исходных колебаний, а не их произведением:

$$\dot{S}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{G}(x) \dot{F}(\omega - x) dx.$$

Более подробно свойства спектров описаны в [1].

1.5. Временные характеристики колебаний

Наряду с рассмотренным выше спектральным подходом к описанию колебаний часто на практике оказывается необходимой характеристика, которая давала бы представление о других свойствах, например о скорости изменения колебания во времени, о длительности колебания без разложения его на гармонические составляющие. В качестве таких временных характеристик используются корреляционные функции.

Автокорреляционная функция (АКФ) определяется формулой

$$R_s(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) s(t - \tau) dt,$$

характеризует изменение колебания $s(t)$ во времени, представляя степень связи колебания $s(t)$ со своей копией $s(t - \tau)$, сдвинутой во времени на интервал τ .

АКФ обладает следующими свойствами:

1. Функция имеет максимум при нулевой задержке во времени:

$$R_s(\tau) = \max \text{ при } \tau = 0 \text{ и равна } R_s(0).$$

2. При $\tau = 0$ АКФ равна энергии колебания:

$$R_s(0) = \int s^2(t) dt.$$

3. АКФ – четная функция своего аргумента.
4. АКФ не имеет информации о начальной фазе колебания.
5. У периодических колебаний АКФ тоже периодическая функция с тем же периодом T , что и у исходного колебания (рис. 1.11).

У гармонического колебания $s(t)=A_0 \cos(\omega_0 t - \theta)$ АКФ имеет вид

$$R_{s_1, s_2}(\tau) = \frac{A_0^2}{2} \cos(\omega_0 \tau).$$

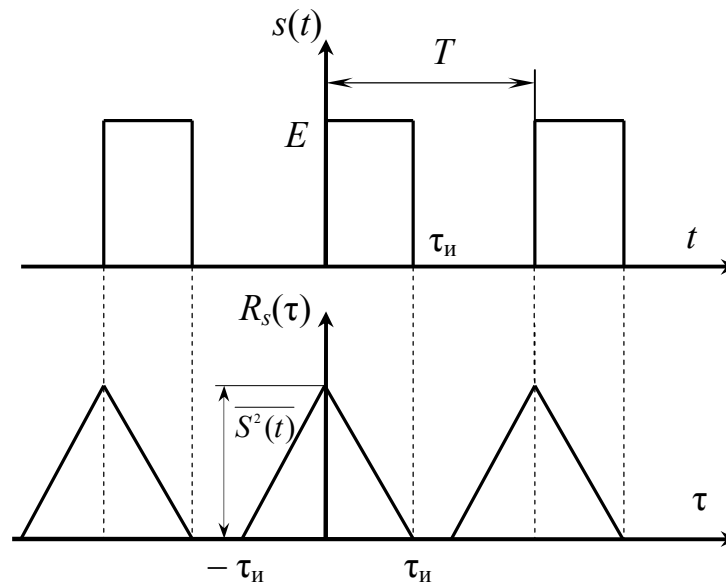


Рис. 1.11. АКФ периодической последовательности прямоугольных импульсов

Взаимная корреляционная функция (ВКФ) характеризует степень связи колебания $s_1(t)$ с копией другого колебания $s_2(t)$, сдвинутой во времени на интервал τ :

$$R_{s_1, s_2}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t) s_2(t - \tau) dt.$$

В отличие от АКФ эта характеристика имеет информацию о начальных фазах колебаний и максимальна при

$$\tau = (\theta_1 - \theta_2) / \omega_1,$$

где θ_1 — начальная фаза колебания $s_1(t)$;

θ_2 — начальная фаза колебания $s_2(t)$.

У двух гармонических колебаний $s_1(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \theta_1)$ и $s_2(t) = A_2 \cos(\omega_1 t + \theta_2)$ ВКФ имеет вид

$$R_{s_1, s_2}(\tau) = \frac{A_1 A_2}{2} \cos[\omega_1 \tau - (\theta_1 - \theta_2)].$$

У колебания $s(t)$ АКФ и спектральная плотность $\dot{S}(\omega)$ связаны соотношением:

$$R_s(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}^2(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega,$$

$$\dot{S}^2(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_s(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau.$$

Эти формулы используют для вычисления спектра по АКФ или наоборот для вычисления АКФ по известной спектральной плотности.

1.6. Случайные колебания

Пусть случайное колебание (или случайный процесс, как принято в литературе) обозначим $X(t)$. Конкретный вид этого колебания в данном опыте называют реализацией случайного процесса $x(t)$. Каждая реализация будет отличаться от предыдущих и последующих (рис. 1.12).

В фиксированные моменты времени t_1, t_2 (сечения) значения, принимаемые случайным процессом, образуют совокупность случайных величин $x_1(t_1), x_2(t_1), \dots, x_3(t_2)$. Свойства этих случайных величин, представляющие свойства случайного процесса $x(t)$, определяются вероятностными характеристиками: законами распределения вероятностей, моментными функциями, корреляционными функциями, энергетическим спектром.

Законы распределения:

1. Одномерная плотность вероятности (рис. 1.13), или дифференциальный закон распределения вероятностей:

$$w_1(x, t_1) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P[x_1 \leq x(t_1) \leq x_1 + \Delta x]}{\Delta x},$$

где $P [x_1 \leq x(t) \leq x_1 + \Delta x]$ – вероятность пребывания реализации в дифференциальном коридоре Δx (см. рис. 1.12), т. е. между постоянными уровнями x_1 и $x_1 + \Delta x$.

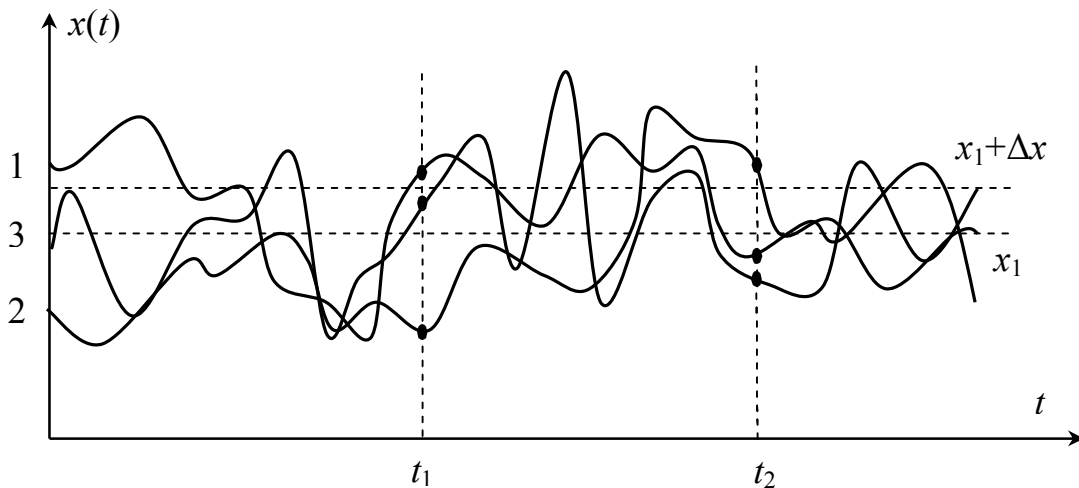


Рис. 1.12. Три реализации случайного процесса $x(t)$

2. Функция распределения вероятностей (рис. 1.13):

$$F_1(x) = P [x(t_1) \leq x_1],$$

где $P [x(t_1) \leq x_1]$ – вероятность пребывания реализации ниже уровня x_1 .

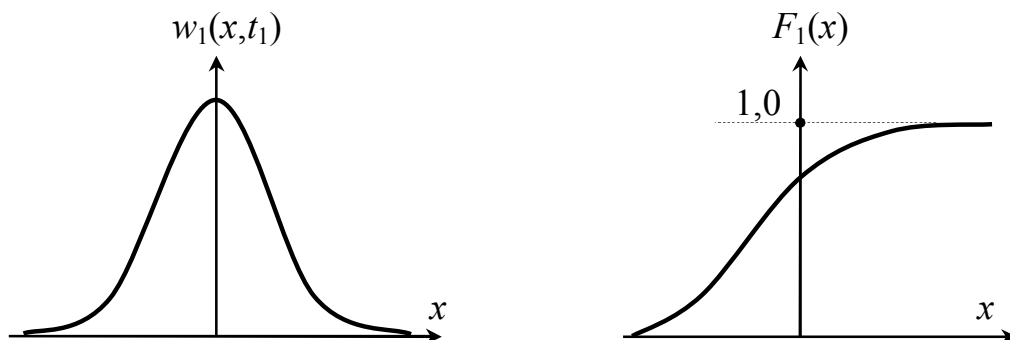


Рис. 1.13. Плотность вероятности $w_1(x, t_1)$ и функция распределения $F_1(x)$ случайного процесса

Некоторые свойства законов распределения случайных процессов:

$$\int_{-\infty}^{\infty} w(x) dx = 1,$$

$$F(-\infty) = 0,$$

$$F(\infty) = 1.$$

Моментные функции (числовые характеристики):

1. Математическое ожидание:

$$m_x = M[x(t)] = \langle x(t) \rangle = \int x w(x) dx = \overline{x(t)}.$$

Математическое ожидание характеризует среднее значение, вокруг которого группируются мгновенные значения исследуемого случайного процесса (рис. 1.14).

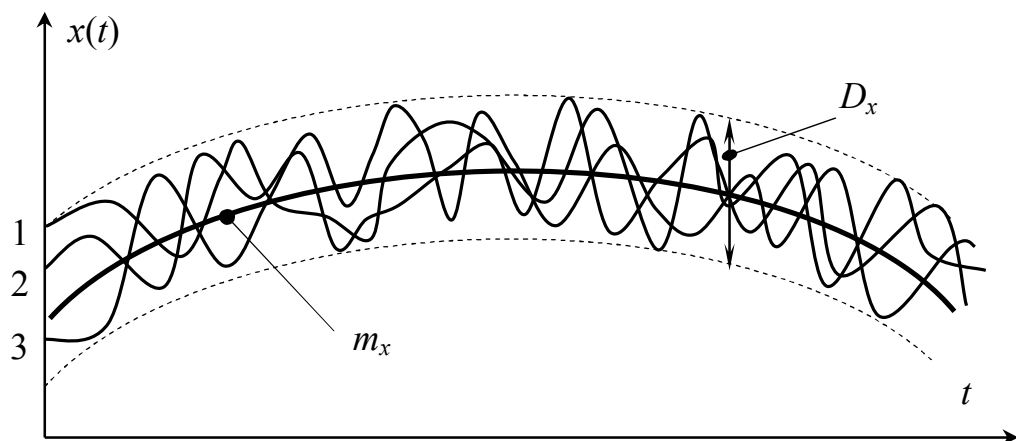


Рис. 1.14. Математическое ожидание m_x и дисперсия случайного процесса D_x

2. Дисперсия:

$$D_x = \sigma_x^2 = \langle x^2(t) \rangle - (\langle x(t) \rangle)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \langle x \rangle)^2 w(x, t) dx.$$

Дисперсия характеризует границы диапазона, внутри которого группируются мгновенные значения случайного процесса (рис. 1.14).

Корреляционная функция

$$K_x(t_1, t_2) = \langle x_1 x_2 \rangle - \langle x_1 \rangle \cdot \langle x_2 \rangle$$

характеризует изменение случайного процесса во времени.

Энергетический спектр:

$$G_x(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \left(\frac{S_T(\omega) S_T^*(\omega)}{T} \right),$$

где $S_T(\omega)$ – спектр реализации $x(t)$; $S_T(\omega) = \int_0^T x(t) e^{-j\omega t} dt$;

$S_T^*(\omega)$ – комплексно-сопряженный спектр реализации $x(t)$;

$$S_T^*(\omega) = \int_0^T x(t) e^{j\omega t} dt;$$

T – длительность реализаций.

Физический смысл энергетического спектра случайного процесса $G_x(\omega)$ – это доля мощности случайного процесса, приходящаяся на единицу частоты.

Энергетический спектр и АКФ случайного процесса связаны друг с другом формулой Винера—Хинчина:

$$\left\{ \begin{array}{l} G_x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} K_x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau, \\ K_x(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_x(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega. \end{array} \right\}$$

Эти формулы используют для вычисления спектра $G_x(\omega)$ по АКФ или наоборот для определения автокорреляционной функции случайного процесса по его энергетическому спектру.

В реализации случайного процесса длительностью T можно выделить некоторые «особые точки» или мгновенные значения, соответствующие выбросам, экстремумам и пересечениям. Под выбросом случайного процесса понимают событие, заключающееся в превышении реализацией некоторого уровня U (рис. 1.15).

При этом реализацию случайного процесса на конечном интервале времени могут характеризовать следующие параметры, связанные с пересечениями, выбросами и экстремумами: длительность выброса τ , интервал между выбросами θ , амплитуда A

и площадь выброса s , время между двумя соседними пересечениями τ_n , интервал до первого пересечения τ_0 , локальные максимумы H^+ и минимумы H^- , интервал времени между соседними экстремумами τ_{+-} и τ_{-+} , разность высот между соседними экстремумами h_{+-} и h_{-+} , число выбросов N в реализации длительностью T и другие, указанные на рис. 1.15.

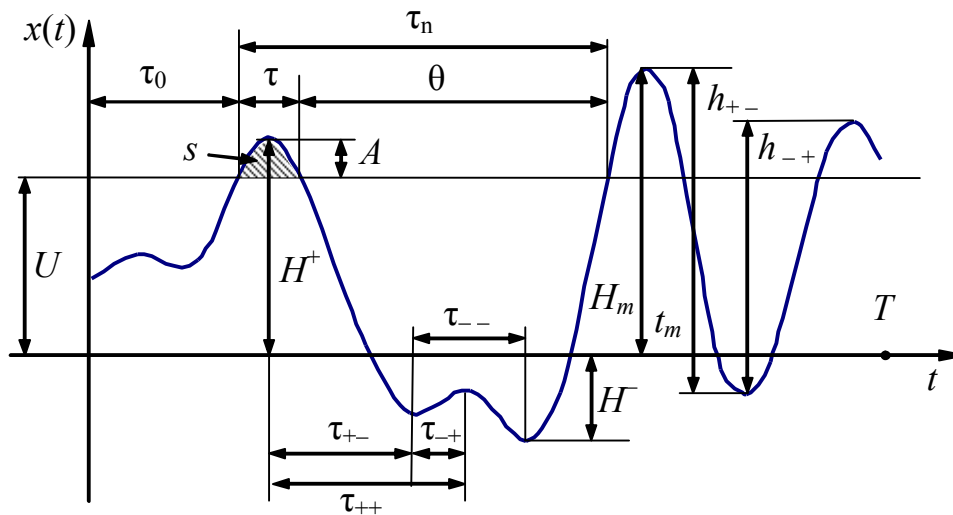


Рис. 1.15. Реализация случайного процесса

Вероятностные характеристики указанных выше амплитудно-временных параметров пересечений, выбросов, экстремумов оказываются необходимыми при решении разных практических задач. К ним относятся следующие: анализ действия полезных сигналов и шумов на электронные ключи и триггеры; анализ работы следящих систем в условиях шумов; расчет на прочность механических материалов, находящихся под действием случайных нагрузок; оценка микрошероховатости обработанной поверхности; обработка сигналов в медицинской и технической диагностике и многие другие.

Глава 2

ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ

2.1. Основные понятия и определения

Электрической цепью называется совокупность устройств и объектов, образующих путь для электрического тока, электромагнитные процессы в которых могут быть описаны с помощью понятий об ЭДС, напряжении и токе. В общем случае электрическая цепь состоит из источников и приемников электрической энергии и промежуточных звеньев (проводов, аппаратов), связывающих источники с приемниками.

Источниками электрической энергии являются химические источники тока, термоэлементы, генераторы и другие устройства, в которых происходит процесс преобразования химической, молекулярно-кинетической, тепловой, механической или другого вида энергий в электрическую. К источникам можно отнести и приемные антенны, в которых в отличие от перечисленных выше устройств не происходит изменения вида энергии.

Приемниками электрической энергии, или так называемой нагрузкой, служат электрические лампы, электронагревательные приборы, электрические двигатели и другие устройства, в которых электрическая энергия превращается в световую, тепловую, механическую и др. К нагрузкам относятся и передающие антенны, излучающие электромагнитную энергию в пространство.

Расчеты электрических цепей и исследования процессов, происходящих в них, основываются на различных допущениях и некоторой идеализации реальных объектов электрических цепей. Под элементами в теории электрических цепей подразумевают обычно не физически существующие составные части электротехнических устройств, а их идеализированные модели, которым теоретически приписываются определенные электрические и магнитные свойства, так что они в совокупности приближенно отображают явления, происходящие в реальных устройствах.

В теории электрических цепей различают активные и пассивные элементы. Активными элементами считаются источники электрической энергии: источники ЭДС и источники тока. К пас-

сивным элементам электрической цепи относятся сопротивления, индуктивности и емкости. Соответственно различают активные и пассивные цепи.

Эти важные понятия лежат в основе электротехники, подробно рассмотрены ниже.

Электрический ток может быть постоянным (неизменяющимся) или переменным, т. е. изменяющимся в зависимости от времени.

Направление тока характеризуется знаком тока. Понятия положительный ток или отрицательный ток имеют смысл, если только сравнивать направление тока в проводнике с некоторым заранее выбранным ориентиром – так называемым положительным направлением.

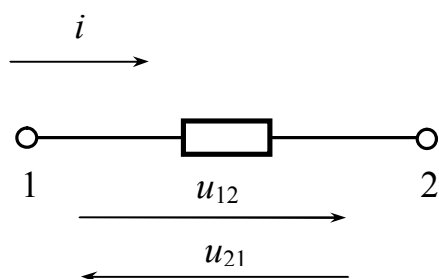


Рис. 2.1. Участок электрической цепи с выбранными положительными направлениями тока и напряжения

Положительное направление тока выбирается произвольно. Оно обычно указывается стрелкой. Если в результате расчета тока, выполненного с учетом выбранного положительного направления, ток имеет знак плюс ($i > 0$), то это означает, что его направление совпадает с выбранным положительным направлением. В противном случае, когда ток отрицательный ($i < 0$), он направлен противоположно.

Таким образом, выбранное положительное для тока направление само по себе не означает направления, в котором перемещаются электрические заряды; оно только придает определенный смысл знаку тока.

Изобразим некоторый участок цепи, через который проходит ток i , в виде прямоугольника и обозначим концы (выводы) этого участка цифрами 1 и 2 (рис. 2.1). Разность электрических потенциалов точек 1 и 2 представляет собой напряжение на данном участке цепи. Напомним, что разность электрических потенциалов определяется работой, затрачиваемой на перенос единичного положительного заряда из точки 1 в точку 2.

Значение напряжения в любой текущий момент времени обозначается через u , может быть постоянным или переменным. В системе СИ напряжение измеряется в вольтах (В).

Для придания определенного смысла знаку напряжения на рассматриваемом участке цепи для напряжения, так же как и для тока, произвольно выбирается положительное направление. Чаще всего его выбирают совпадающим с положительным направлением тока и указывают стрелкой.

В выбранном положительном направлении и отсчитывается напряжение. Пусть на рис. 2.1 отсчет напряжения ведется от точки 1 к точке 2. Когда потенциал точки 1 выше потенциала точки 2, напряжение положительное, в противном случае оно отрицательное.

Для уяснения выбранного направления отсчета напряжения можно вместо стрелки пользоваться обозначением с помощью индексов, при котором порядок расположения индексов, соответствующих точкам цепи, отвечает положительному направлению, выбранному для напряжения. Так, применительно к рис. 2.1 напряжение, отсчитываемое в положительном направлении тока, равно u_{12} . Напряжение, отсчитываемое в обратном направлении, имеет противоположный знак: $u_{21} = -u_{12}$.

Двойное индексное обозначение возможно и для тока. Например, i_{12} обозначает ток, который имеет положительное направление на участке цепи от точки 1 к точке 2. Однако на практике большее распространение нашло обозначение с помощью стрелок.

Положительными направлениями токов и напряжений пользуются при исследовании процессов, происходящих в электротехнических устройствах, и расчете электрических цепей. Для краткости положительное направление будем называть просто направлением.

Отчетливое уяснение этих важных понятий совершенно обязательно для усвоения всего последующего материала.

Предположим, что через участок электрической цепи (приемник энергии) под воздействием приложенного напряжения u проходит электрический заряд q . Совершаемая при этом элементарная работа, или, что то же, поступающая в приемник элементарная энергия, равна

$$dw = udq = uidt.$$

Производная энергии по времени, т. е. скорость поступления в цепь электрической энергии в данный момент времени, представляет собой мгновенную мощность. Следовательно, мгновенная мощность, поступающая в приемник, равна произведению мгновенных значений напряжения и тока:

$$p = \frac{dw}{dt} = u \frac{dq}{dt} = ui.$$

Мгновенная мощность p – величина алгебраическая; значение ее положительно при одинаковых знаках u и i и отрицательно при разных знаках.

Если положительные направления для напряжения и тока приняты совпадающими, то при $p > 0$ энергия поступает в приемник, а при $p < 0$ она возвращается из рассматриваемого участка цепи к источнику.

Энергия, поступившая в приемник за промежуток времени от t_1 до t_2 выражается интегралом

$$W = \int_{t_1}^{t_2} p dt.$$

В отличие от мгновенной мощности p , которая может иметь любой знак, энергия, поступившая в приемник, не может быть отрицательной.

2.2. Элементы электрических цепей

2.2.1. Сопротивление

Сопротивлением называется идеализированный элемент цепи (резистор), в котором происходит необратимый процесс преобразования электрической энергии в теплоту. При этом термин «сопротивление» и соответствующее ему буквенное обозначение r применяются как для обозначения элемента цепи, так и для количественной оценки величины, равной отношению напряжения на данном элементе цепи к току, проходящему через него:

$$r = \frac{u}{i}. \quad (2.1)$$

Здесь предполагается, что положительные направления тока и напряжения совпадают, при этом знаки i и u одинаковы и $r > 0$. Величина $g = 1/r$, обратная сопротивлению, называется проводимостью. В системе СИ сопротивление r измеряется в омах (Ом), а проводимость – в сименсах (См). Формула (2.1) выражает закон Ома, экспериментально установленный Омом в 1826 г.

Условное графическое изображение сопротивления (резистора) с указанием выбранных положительных направлений тока и напряжения приведено на рис. 2.2.

Мгновенная мощность, поступающая в сопротивление, равна произведению мгновенных значений напряжения и тока:

$$p_r = ui = ri^2 = gu^2.$$

Следовательно, параметр r может быть численно определен как отношение мгновенной мощности к квадрату мгновенного тока, проходящего через сопротивление:

$$r = \frac{p_r}{i^2}.$$

Электрическая энергия, поступившая в сопротивление r и превращенная в теплоту, начиная с некоторого момента времени, например $t = 0$, до рассматриваемого момента t , равна:

$$w_r = \int_0^t p_r dt = \int_0^t ri^2 dt = \int_0^t gu^2 dt.$$

В случае постоянного тока ($i = I = \text{const}$) $w_r = rI^2t$.

Превращение электрической энергии w_r в тепловую впервые было доказано Джоулем и Ленцем, установившими тепловой эквивалент электрической энергии, равный 0,24 кал/Дж.

Выделение током тепловой энергии впервые использовано для целей освещения А. Н. Лодыгиным, создавшим в 1873 г. лампу накаливания. Оно целесообразно используется в технике – электронагревательных приборах и т. п. К вредным последствиям теплового действия тока относятся потери электрической энергии в проводах, машинах, аппаратах, порча изоляции проводов от нагрева и т. п.

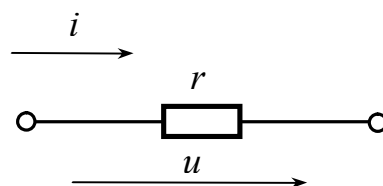


Рис. 2.2. Условное обозначение сопротивления

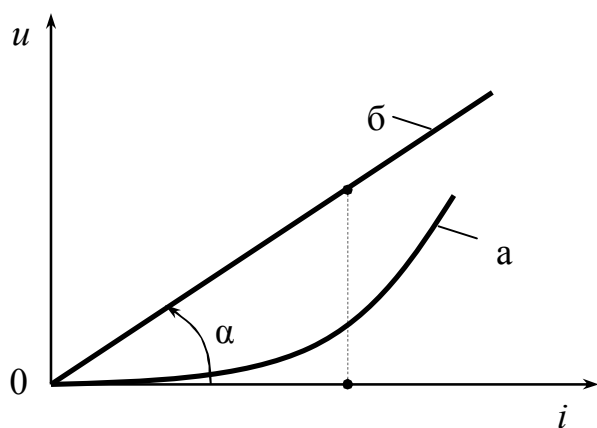


Рис. 2.3. Вольт-амперная характеристика сопротивлений:
a – нелинейная; *б* – линейная

Параметр r в общем случае зависит от тока i (например, вследствие нагрева сопротивления током). Зависимость напряжения на сопротивлении от тока, проходящего через данное сопротивление, называется вольт-амперной характеристикой, которая в общем случае нелинейна.

Если сопротивление r не зависит от тока и его направ-

ления, то имеет место прямая пропорциональность между напряжением и током, выражающая закон Ома. В этом случае сопротивление называется линейным.

На рис. 2.3 показаны вольт-амперные характеристики сопротивления – нелинейная (кривая *a*) и линейная (прямая *б*).

2.2.2. Индуктивность

Индуктивностью называется идеализированный элемент электрической цепи, приближающийся по свойствам к индуктивной катушке, в которой накапливается энергия магнитного поля. При этом термин «индуктивность» и соответствующее ему условное обозначение L применяются как для обозначения самого элемента цепи, так и для количественной оценки отношения потокосцепления самоиндукции к току в данном элементе:

$$L = \frac{\Psi}{i}.$$

Потокосцеплением самоиндукции цепи называется сумма произведений магнитных потоков, обусловленных только током в этой цепи, на число витков, с которыми они сцеплены. Если все витки пронизываются одним и тем же магнитным потоком, то потокосцепление равно произведению магнитного потока на число витков.

В Международной системе единиц СИ Ψ измеряется в веберах (Вб), L – в генри (Гн). При этом всегда потокосцепление и ток имеют одинаковый знак, так что $L > 0$.

Зависимость потокосцепления от тока в общем случае нелинейна, и параметр L зависит от тока. В случае, когда ампервеберная характеристика $\Psi(i)$ прямолинейна, индуктивность L постоянна (линейная индуктивность). На рис. 2.4 показаны нелинейная и линейная зависимости потокосцепления от тока. В этом учебном пособии рассматриваются линейные индуктивности.

На основании закона электромагнитной индукции Фарадея – Максвелла изменение потокосцепления самоиндукции вызывает электродвижущую силу (ЭДС) самоиндукции, которая выражается формулой

$$e_L = -\frac{d\Psi}{dt}. \quad (2.2)$$

По закону Ленца, выражающему принцип электромагнитной инерции, эта ЭДС противодействует изменению потокосцепления, что и учитывается знаком минус в (2.2), поскольку положительное направление для e_L выбрано совпадающим с положительным направлением i .

Ввиду совпадения положительных направлений e_L и i положительные направления магнитного потока вдоль оси витков и наводимой им ЭДС самоиндукции точно так же, как и положительные направления тока и создаваемого им магнитного потока, связаны правилом правоходового винта.

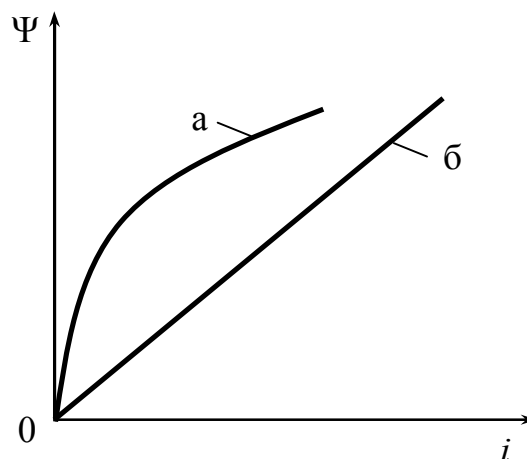


Рис. 2.4. Зависимости потокосцепления от тока:
а – нелинейная; б – линейная

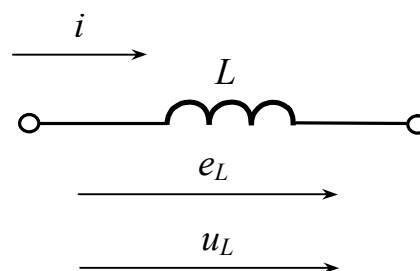


Рис. 2.5. Условное обозначение индуктивности и положительные направления тока, ЭДС самоиндукции и напряжения

Условное графическое изображение индуктивности с указанием выбранных положительных направлений тока и ЭДС самоиндукции приведено на рис. 2.5.

Если L не зависит от i , то предыдущая формула принимает вид

$$e_L = -L \frac{di}{dt} . \quad (2.3)$$

Величина

$$u_L = -e_L = L \frac{di}{dt} \quad (2.4)$$

называется падением напряжения в индуктивности или, что то же, напряжением на индуктивности. Положительное направление u_L совпадает с положительным направлением i (рис. 2.5).

На основании (2.4) ток в индуктивности

$$i = \frac{1}{L} \int u_L dt ,$$

или

$$i = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t u_L dt .$$

Нижний предел интеграла принят равным $-\infty$, так как до рассматриваемого момента времени t процесс мог длиться сколь угодно долго.

При $t = 0$ ток в индуктивности равен

$$i(0) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^0 u_L dt ,$$

следовательно,

$$i = i(0) + \frac{1}{L} \int_0^t u_L dt ,$$

т. е. в интервале времени от нуля до t ток в индуктивности изменяется на величину $\frac{1}{L} \int_0^t u_L dt$, определяемую площадью, ограниченной в этом интервале кривой напряжения u_L .

Мгновенная мощность, поступающая в индуктивность, равна произведению мгновенных тока и напряжения:

$$p_L = u_L i = Li \frac{di}{dt}.$$

Она связана с процессом нарастания или убывания энергии магнитного поля. Энергия магнитного поля в произвольный момент времени t определяется по формуле

$$w_L = \int_{-\infty}^t p_L dt = \int_0^t Li di = \frac{Li^2}{2} = \frac{\Psi^2}{2L}.$$

Здесь учтено, что при $t = -\infty$ ток в индуктивности $i(-\infty) = 0$.

Если часть магнитного потока, связанного с индуктивным элементом, связана одновременно и с другим индуктивным элементом, то эти два элемента, кроме параметров L_1 и L_2 , обладают параметром M , называемым взаимной индуктивностью. Последний представляет собой отношение потокосцепления взаимной индукции одного из элементов к току в другом элементе:

$$M = \frac{\Psi_{12}}{i_2} = \frac{\Psi_{21}}{i_1}, \quad (2.5)$$

где Ψ_{12} – потокосцепление первого элемента, обусловленное током второго элемента;

Ψ_{21} – потокосцепление второго элемента, обусловленное током первого элемента.

В этом случае в первом и втором элементах наводятся ЭДС взаимной индукции, равные соответственно:

$$\left. \begin{aligned} e_{1M} &= -\frac{d\Psi_{12}}{dt} = -M \frac{di_2}{dt}, \\ e_{2M} &= -\frac{d\Psi_{21}}{dt} = -M \frac{di_1}{dt}. \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

Выражения (2.6) получены в предположении, что M не зависит от i_1 и i_2 , так как здесь рассматриваются линейные цепи.

M измеряется, так же как и L , в генри. Однако в отличие от параметра L взаимная индуктивность M обозначает не какой-либо

самостоятельный элемент электрической цепи, а лишь магнитную связь между индуктивными элементами.

Вопрос взаимной индуктивности подробнее рассмотрен далее.

2.2.3. Емкость

Емкостью называется идеализированный элемент электрической цепи, приближенно заменяющий конденсатор, в котором накапливается энергия электрического поля. При этом термин «емкость» и соответствующее ему буквенное обозначение C применяются как для обозначения самого элемента цепи, так и для количественной оценки отношения заряда к напряжению на этом элементе:

$$C = q / u_c.$$

Если q и u_c измеряются в кулонах (Кл) и вольтах (В), то C – в фарадах (Ф). При этом всегда заряд и напряжение имеют одинаковый знак, так что $C > 0$.

Зависимость заряда от напряжения в общем случае нелинейна, и, следовательно, параметр C зависит от напряжения.

Рис.2.6. Зависимость электрического заряда от напряжения:
 a – нелинейная; b – линейная

В случае, когда вольт-кулонная характеристика $q(u)$ прямолинейна, емкость C постоянна (линейная емкость). На рис.2.6 показаны нелинейная и линейная зависимости заряда от напряжения. Далее рассматриваются линейные емкости.

Предположим, что емкость образована двумя пластинами, разделенными диэлектриком. Под влиянием приложенного напряжения на пластинах сосредоточатся равные количества электричества противоположных знаков. Пластина с более высоким потенциалом зарядится положительным электричеством, а пластина с более низким потенциалом – отрицательным.

Ток равен производной электрического заряда по времени, поэтому с изменением напряжения на емкости в присоединенной

к ней последовательно электрической цепи создается ток, который определяется скоростью изменения заряда на емкости:

$$i = \frac{dq}{dt} = C \frac{du_c}{dt}. \quad (2.7)$$

Здесь знак заряда q соответствует знаку пластины, к которой направлен ток i .

Этот ток рассматривается как ток проводимости в проводниках, присоединенных к емкостному элементу (ток, обусловленный движением заряженных частиц под действием электрического поля в веществе, обладающем электропроводностью), переходящий в ток смещения в диэлектрике емкостного элемента. Последнее понятие, применяемое в теории поля, означает величину, прямо пропорциональную скорости изменения напряженности электрического поля.

Напомним, что напряженность электрического поля определяется силой, действующей на электрический заряд, равный единице. Ток смещения имеет размерность тока. Благодаря введению этого понятия ток в цепи с емкостью представляется замкнутым через диэлектрик. Согласно (2.7) ток положителен, когда заряд q и соответственно напряжение u_c возрастают.

На основании (2.7) напряжение на емкости

$$u_c = \frac{1}{C} \int i dt$$

или

$$u_c = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^0 i dt.$$

Здесь, как и в предыдущем параграфе, предполагается, что до рассматриваемого момента времени t процесс мог длиться сколь угодно долго, и поэтому нижний предел интеграла принят равным $-\infty$.

При $t = 0$ напряжение на емкости

$$u_c(0) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^0 i dt.$$

Следовательно,

$$u_C = u_C(0) + \frac{1}{C} \int_0^t i dt,$$

т. е. в интервале времени от нуля до t напряжение на емкости изменяется на величину $\frac{1}{C} \int_0^t i dt$, определяемую площадью, ограниченной в этом интервале кривой тока i .

Условное графическое изображение емкости с указанием положительных направлений тока и напряжения приведено на рис. 2.7. Полярность емкости, указанная на рис. 2.7 знаками «+» и «-», соответствует положительному напряжению u_C , т. е. положительному заряду на пластине +.

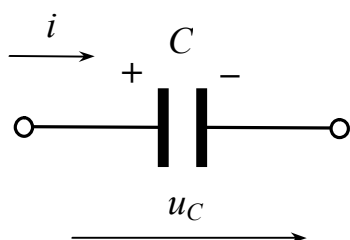


Рис. 2.7. Условное обозначение емкости и положительное направление тока и напряжения

Мгновенная мощность, поступающая в емкость, равна

$$p_C = u_C i = C u_C \frac{du_C}{dt}.$$

Она связана с процессом накопления или убыли электрического заряда в емкости.

Когда заряд положителен и возрастает, ток положителен и в емкость поступает электрическая энергия из внешней цепи. Когда заряд положителен, но убывает, т. е. ток отрицателен, энергия, ранее накопленная в электрическом поле емкости, возвращается во внешнюю цепь.

Допустим, что к емкости C приложено некоторое напряжение u_C . Энергия электрического поля в произвольный момент времени t определяется по формуле

$$w_C = \int_{-\infty}^t p_C dt = \int_0^{u_C} C u_C du_C = \frac{C u_C^2}{2} = \frac{q^2}{2C}.$$

В данном выражении учтено, что при $t = -\infty$ напряжение на емкости $u_C(-\infty) = 0$.

2.2.4. Замещение физических элементов идеализированными элементами цепи

Представление о сопротивлении, индуктивности и емкости как идеализированных элементах электрической цепи основано на предположении, что потери энергии, магнитное и электрическое поля сосредоточиваются в отдельных, не зависящих друг от друга элементах цепи. Раздельное рассмотрение сопротивления, индуктивности и емкости представляет приближенный метод исследования цепи. В действительности потери энергии, магнитные и электрические поля сопутствуют друг другу.

Вследствие наличия магнитного и электрического полей проводник наряду с сопротивлением имеет некоторые индуктивность и емкость.

Для уменьшения индуктивности и собственной емкости проволочные резисторы выполняются в виде пластинчатых или плетеных элементов. Применяются также непроволочные резисторы. Последние представляют собой фарфоровые цилиндрики, на которые нанесен слой углерода (так называемые углеродистые резисторы), или стержни из глинистого материала, смешанного с графитом (объемные карбокерамические резисторы).

Теперь представим себе простейшую индуктивную катушку в виде нескольких круговых витков проводника, по которому проходит ток.

При постоянном токе напряжение на выводах катушки определится падением напряжения на ее сопротивлении в соответствии с (2.1) и ток во всех точках будет одинаковым.

При переменном же токе изменяющееся магнитное поле будет наводить в витках ЭДС самоиндукции. Между витками, так же как и между отдельными точками смежных витков, электрическое поле станет переменным. В связи с этим ток в различных витках будет неодинаковым, так как появится ток смещения между витками. Чем выше частота переменного тока, тем больше будут ЭДС самоиндукции и ток смещения. При низких частотах током смещения можно пренебречь, при высоких же частотах ток смещения, обусловленный изменением напряженности электрического поля, может быть соизмерим по величине с током в витках или даже может превышать его. Таким образом, в зависимо-

сти от выбранного диапазона частот индуктивная катушка может быть представлена либо как сопротивление r (при постоянном токе – рис. 2.8, *а*), либо как индуктивность L с последовательно включенным сопротивлением r (при низких частотах – рис. 2.8, *б*), либо как индуктивность L и сопротивление r , соединенные параллельно с емкостью C (при высоких частотах – рис. 2.8, *в*).

Если катушка имеет много витков, то проходящий через нее ток создает магнитный поток, пропорциональный числу витков. Считая, что этот магнитный поток сцеплен со всеми витками катушки, приходим к выводу, что потокосцепление самоиндукции и соответственно индуктивность катушки пропорциональны квадрату числа витков.

Положим, например, что катушка, состоящая из w витков, насажена на тороидальный магнитопровод или достаточно длинный прямолинейный магнитопровод, длина которого l (м) и площадь поперечного сечения S (м²).

Обозначим через μ_a абсолютную магнитную проницаемость магнитопровода (равную произведению относительной магнитной проницаемости на магнитную постоянную $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м).

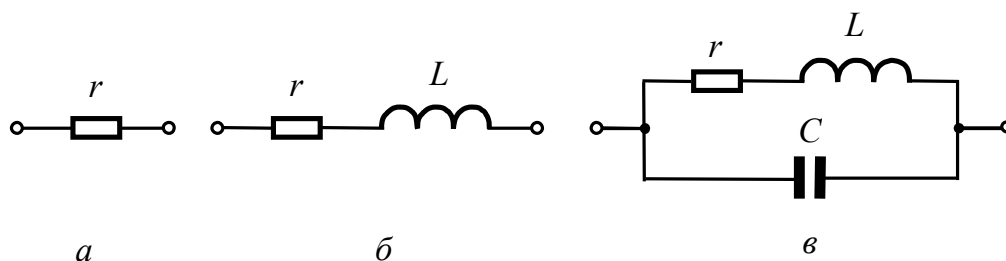


Рис. 2.8. Электрические схемы замещения индуктивной катушки:

а – при постоянном токе; *б* – при низких частотах;

в – при высоких частотах

Магнитный поток в веберах (Вб) определяется отношением Магнитодвижущей силы (м. д. с.) всей катушки iw к магнитному сопротивлению магнитопровода $r_m \approx 1 / \mu_a S$:

$$\Phi \approx \frac{iw\mu_a S}{l},$$

поэтому индуктивность катушки в генри (Гн) согласно определению

$$L = \frac{w\Phi}{i} \approx \frac{w^2 \mu_a S}{l}.$$

Она определяется геометрическими размерами катушки, магнитной проницаемостью материала магнитопровода и квадратом числа витков.

Перейдем теперь к рассмотрению плоского конденсатора, состоящего из двух параллельных пластин, разделенных диэлектриком. При постоянном напряжении и идеальном диэлектрике тока в цепи не будет. Если напряжение переменное, то в процессе изменения электрического заряда возникает переменный ток, создающий переменное магнитное поле. Эффект, вызываемый магнитным полем, может быть учтен в электрической схеме замещения с помощью некоторой индуктивности, включенной последовательно с емкостью конденсатора.

Обычно этой индуктивностью пренебрегают из-за ее относительной малости. Наконец, в диэлектрике благодаря некоторой проводимости возникают тепловые потери, которые возрастают с частотой. Потери на нагрев учитываются в схеме замещения конденсатора посредством сопротивления r , включенного параллельно емкости C (рис. 2.9).

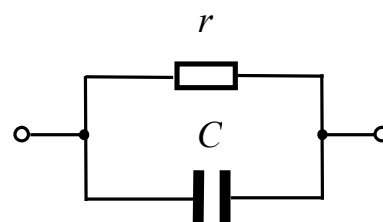


Рис. 2.9. Электрическая схема замещения конденсатора

Емкость конденсатора определяется размерами обкладок, расстоянием между ними и диэлектрическими свойствами среды, заполняющей пространство между обкладками.

2.2.5. Источники ЭДС и источники тока

В теории электрических цепей пользуются идеализированными источниками электрической энергии: источником ЭДС и источником тока. Им приписываются следующие свойства.

Идеальный источник ЭДС представляет собой активный элемент с двумя выводами, напряжение на которых не зависит от тока, проходящего через источник. Предполагается, что внутри такого идеального источника пассивные элементы (r , L , C) отсут-

ствуют, и поэтому прохождение через него тока не вызывает в нем падения напряжения.

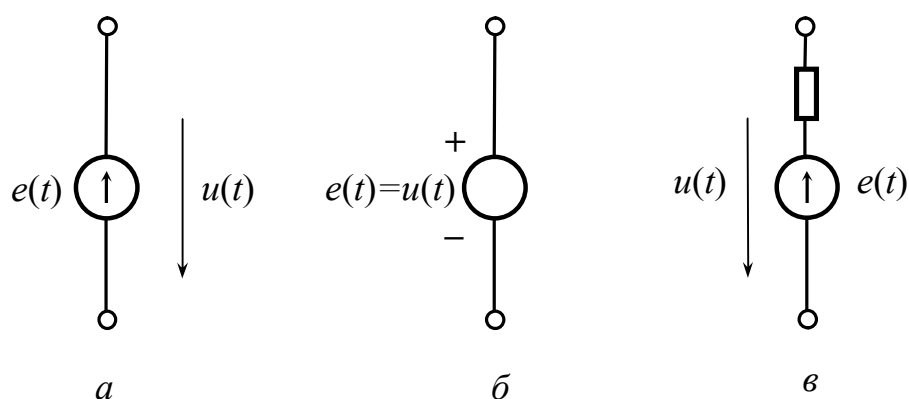


Рис. 2.10. Источники ЭДС: *a*, *б* – идеальные; *в* – конечной мощности

Упорядоченное перемещение положительных зарядов в источнике от меньшего потенциала к большему возможно за счет присущих источнику сторонних сил. Работа, затрачиваемая сторонними силами на перемещение единицы положительного заряда от вывода «–» к выводу «+», называется электродвижущей силой (ЭДС) источника и обозначается $e(t)$.

В соответствии со сказанным выше напряжение на выводах рассматриваемого источника равно его ЭДС, т. е. $u(t) = e(t)$.

Условные обозначения идеального источника ЭДС приведены на рис. 2.10, *a*, *б*. Здесь стрелкой или знаками «+» и «–» указаны положительное направление ЭДС или полярность источника, т. е. направление возрастания потенциала в источнике для моментов времени, соответствующих положительной функции $e(t)$. Ток в пассивной электрической цепи, подключенной к источнику ЭДС, зависит от параметров этой цепи и ЭДС $e(t)$. Если выводы идеального источника ЭДС замкнуть накоротко, то ток теоретически должен быть бесконечно велик, поэтому такой источник рассматривается как источник бесконечной мощности (теоретическое понятие). В действительности при замыкании зажимов реального источника электрической энергии – химического источника тока, генератора и т. п. – ток может иметь только конечное значение, так как ЭДС источника уравновешивается падением

напряжения от тока внутри источника (например, в сопротивлении r , индуктивности L).

Источник ЭДС конечной мощности изображается в виде идеального источника ЭДС с подключенным к нему последовательно пассивным элементом, который характеризует внутренние параметры источника и ограничивает мощность, отдаваемую во внешнюю электрическую цепь (рис. 2.10, в). Обычно внутренние параметры источника конечной мощности незначительны по сравнению с параметрами внешней цепи и могут быть отнесены к последней или в некоторых случаях могут вовсе не учитываться (в зависимости от соотношения величин и требуемой точности расчета).

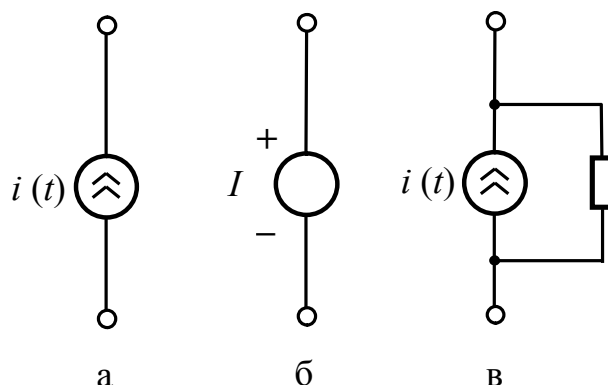


Рис. 2.11. Источники тока:
а, б – идеальные;
в – конечной мощности

Идеальный источник тока представляет собой активный элемент, ток которого не зависит от напряжения на его выводах. Предполагается, что внутреннее сопротивление такого идеального источника бесконечно велико, поэтому параметры внешней электрической цепи, от которых зависит напряжение на выводах источника, не влияют на ток источника.

Условные обозначения идеального источника тока приведены на рис. 2.11, а, б. Стрелка в источнике тока или знаки «+» и «-» указывают положительное направление тока $i(t)$ или полярность источника, т. е. направление перемещения положительных зарядов, или, что то же, направление, противоположное направлению движения отрицательных зарядов, для тех моментов времени, когда функция $i(t)$ положительна.

По мере неограниченного увеличения сопротивления внешней электрической цепи, присоединенной к идеальному источнику тока, напряжение на его выводах и соответственно его мощность, развиваемая им, неограниченно возрастают. По этой причине идеальный источник тока, как и идеальный источник напряжения, рассматривается как источник бесконечной мощности.

Источник конечной мощности изображается в виде идеального источника тока с подключенным к его выводам пассивным элементом, который характеризует внутренние параметры источника и ограничивает мощность, отдаваемую во внешнюю электрическую цепь.

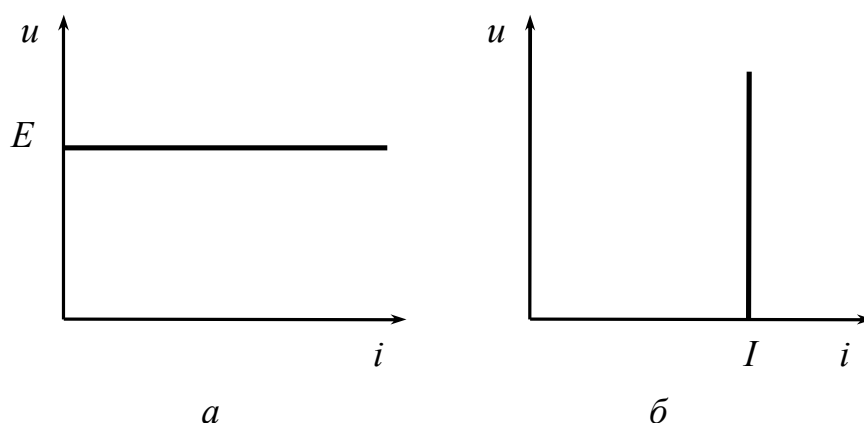


Рис.2.12. Вольт-амперные характеристики источников ЭДС и тока:
 а – идеальный источник ЭДС; б – идеальный источник тока

Представляя собой теоретическое понятие, источник тока применяется в ряде случаев для расчета электрических цепей.

Некоторым подобием источника тока может служить устройство, состоящее из аккумулятора, соединенного последовательно с дополнительным большим сопротивлением. Другим примером источника тока может являться пятиэлектродная усилительная электронная лампа (пентод). Имея внутреннее сопротивление, несоизмеримо большее, чем сопротивление внешней электрической цепи, эти устройства отдают ток, почти не зависящий от изменения внешней нагрузки в больших пределах, и именно в этом отношении они аналогичны источнику тока.

Вольт-амперные характеристики идеальных источников ЭДС и тока представляются прямыми, параллельными осям i и u (рис.2.12, а, б). Реальные источники электрической энергии по своим вольт-амперным характеристикам могут приближаться к идеальным источникам напряжения или тока. Например, в значительной части характеристики $u = f(i)$ напряжение на выводах генератора постоянного тока с независимым возбуждением, а также

ток i генератора постоянного тока с последовательным возбуждением изменяются незначительно.

2.3. Законы Кирхгофа

Основными законами теории цепей наряду с законом Ома являются законы баланса токов в разветвлениях (первый закон Кирхгофа) и баланса напряжений на замкнутых участках цепи (второй закон Кирхгофа).

Распределение токов и напряжений в электрических цепях подчиняется законам Кирхгофа, поэтому они должны быть основательно усвоены для отчетливого понимания материала всех последующих разделов курса.

2.3.1. Первый закон Кирхгофа

Алгебраическая сумма токов в узле равна нулю:

$$\sum i = 0. \quad (2.8)$$

Суммирование распространяется на токи i в ветвях, сходящихся в рассматриваемом узле. При этом знаки токов берутся с учетом выбранных положительных направлений токов: всем токам, направленным к узлу, в уравнении (2.8) приписывается одинаковый знак, например положительный, и соответственно все токи, направленные от узла, входят в уравнение (2.8) с противоположным знаком. Иначе говоря, всякий ток, направленный от узла, может рассматриваться как ток, направленный к узлу, но имеющий противоположный знак.

На рис. 2.13, а в качестве примера показан узел, в котором сходятся четыре ветви.

Уравнение (2.8) имеет в этом случае вид

$$i_1 + i_2 - i_3 - i_4 = 0.$$

Первый закон Кирхгофа выражает тот факт, что в узле электрический заряд не накапливается и не расходуется. Сумма электрических зарядов, приходящих к узлу, равна сумме зарядов, уходящих от узла за один и тот же промежуток времени.

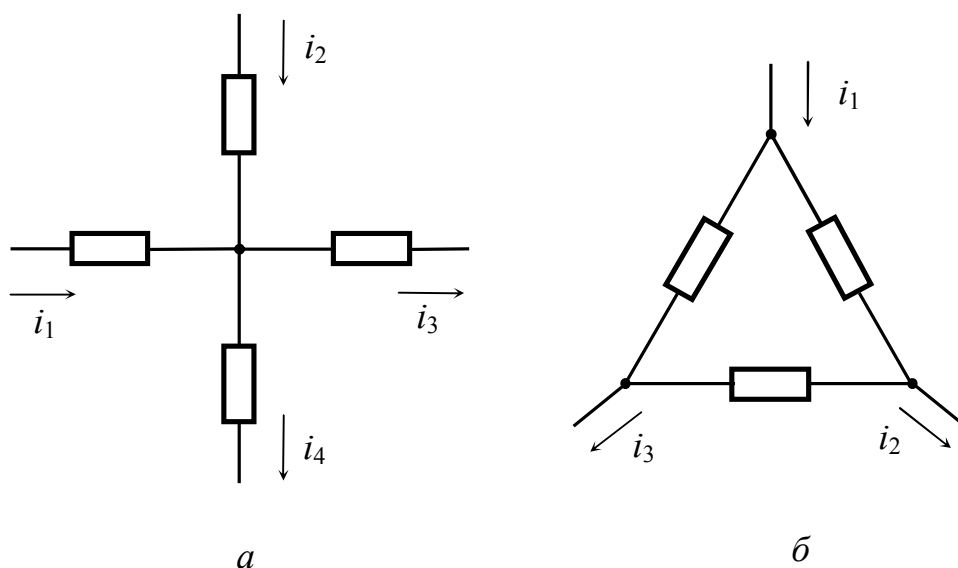


Рис. 2.13. Иллюстрация к первому закону Кирхгофа

Первый закон Кирхгофа применим не только к узлу, но и к любому контуру или замкнутой поверхности, охватывающей часть электрической цепи, так как ни в каком элементе цепи, ни в каком режиме электричество одного знака не может накапливаться.

Так, например, для схемы рис. 2.13, б имеем

$$i_1 - i_2 - i_3 = 0.$$

2.3.2. Второй закон Кирхгофа

Алгебраическая сумма ЭДС в любом контуре цепи равна алгебраической сумме падений напряжения на элементах этого контура:

$$\sum e = \sum u. \quad (2.9)$$

Обход контура совершается в произвольно выбранном направлении, например по ходу часовой стрелки. При этом соблюдается следующее правило знаков для ЭДС и падений напряжения, входящих в (2.9): ЭДС и падения напряжения, совпадаю-

щие по направлению с направлением обхода, берутся с одинаковыми знаками. Например, для схемы рис. 2.14 имеем

$$e_1 - e_2 = u_1 + u_2 + u_3 - u_4.$$

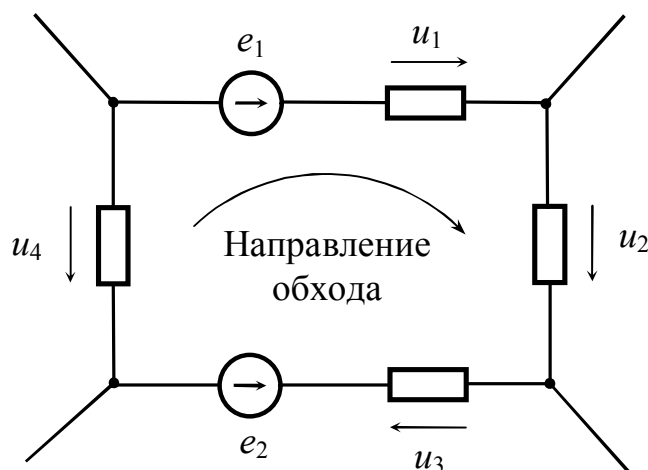


Рис. 2.14. Иллюстрация ко второму закону Кирхгофа

Уравнение (2.9) можно переписать так:

$$\sum (u - e) = 0. \quad (2.10)$$

Здесь $(u - e)$ – напряжение на ветви. Следовательно, алгебраическая сумма напряжений на ветвях в любом замкнутом контуре равна нулю.

Формулы (2.8) и (2.9) написаны в общем виде для мгновенных значений токов, напряжений и ЭДС, справедливы для цепей как переменного, так и постоянного тока.

Глава 3

ЛИНЕЙНЫЕ ЦЕПИ ПРИ ПОСТОЯННОМ ТОКЕ И ПЕРЕМЕННОМ ГАРМОНИЧЕСКОМ ВОЗДЕЙСТВИИ

Электрические цепи постоянного тока, как и любые цепи, состоят из источников электрической энергии постоянного тока и потребителей энергии. В качестве источников широко распространены генераторы постоянного тока и гальванические элементы. Потребителями электрической энергии являются резисторы, электрические двигатели постоянного тока, электролизные ванны, электрические лампочки и другие устройства.

Электрическая энергия в настоящее время производится, распределяется и потребляется в виде энергии переменного тока, который в сравнении с постоянным током обладает рядом существенных преимуществ. Переменный ток получают относительно просто, а энергию переменного тока легко передавать на большие расстояния. Используемые при этом машины переменного тока намного проще и дешевле машин постоянного тока.

Методы расчета (анализа) цепей постоянного и переменного тока одни и те же, поэтому ниже эти методы рассмотрены на примере цепей переменного тока.

3.1. Гармоническое воздействие

Электромагнитный процесс в электрической цепи, при котором мгновенные значения напряжений и токов повторяются через равные промежутки времени, называется периодическим. Наименьшее время, по истечении которого мгновенные значения периодической величины повторяются, называются периодом. Если величину, являющуюся периодической функцией времени t , обозначить через $F(t)$, то для любого положительного или отрицательного значения аргумента t справедливо равенство

$$F(t \pm T) = F(t),$$

где T – период.

Геометрически это значит, что ординаты двух произвольных точек графика $F(t)$ с абсциссами, различающимися на T , одинаковы.

Величина, обратная периоду, т. е. число периодов в единицу времени, называется частотой:

$$f = \frac{1}{T}.$$

Единицей измерения частоты служит герц (Гц). Частота равна 1 Гц, если период равен 1 секунде.

Преобладающим видом периодического процесса в электрических цепях является синусоидальный режим, характеризующийся тем, что все напряжения и токи являются синусоидальными функциями одинаковой частоты. Это возможно только при заданных синусоидальных ЭДС и токах источников.

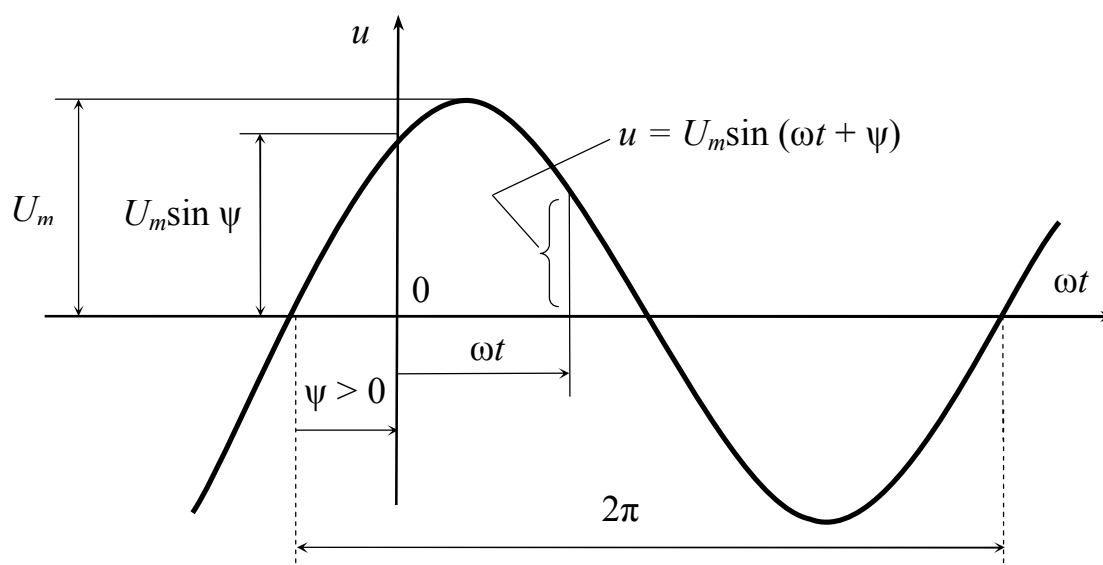


Рис. 3.1. Синусоидальная функция

Как известно из курса математического анализа, синусоида является простейшей периодической функцией. Всякие другие несинусоидальные периодические функции могут быть разложены в бесконечный ряд синусоид, имеющих кратные частоты. По этой причине для исследования процессов в цепях переменного тока в первую очередь необходимо изучить особенности цепей синусоидального тока.

На рис. 3.1 изображена синусоидальная функция

$$u = U_m \sin(\omega t + \psi), \quad (3.1)$$

где U_m – максимальное значение, или амплитуда;

ω – скорость изменения аргумента (угла), называемая угловой частотой, рад/с,

$$\omega = 2\pi f; \quad (3.2)$$

ψ – начальная фаза, определяемая смещением синусоиды относительно начала координат, измеряется абсциссой точки перехода отрицательной полуволны в положительную.

Начальная фаза ψ представляет собой алгебраическую величину. Угол ψ положителен и отсчитывается вправо к точке $t = 0$, когда синусоидальная функция смещена влево относительно начала координат (рис. 3.1).

Косинусоида может рассматриваться как синусоида с начальной фазой $\psi = \pi/2$. Если функция задана в косинусоидальной форме $u = U_m \cos(\omega t + \psi_1)$, то она может быть приведена к виду (3.1) путём замены $\psi_1 = \psi - \pi/2$, поэтому к синусоидальным функциям (3.1) в общем случае причисляются и косинусоидальные функции.

За аргумент функции (3.1) может быть принято время t или соответственно угол ωt . Аргументу t соответствует период T , а аргументу ωt – период $\omega T = 2\pi$. Следует иметь в виду, что аргумент ωt выражается в радианах, причем в тех же единицах выражается и начальная фаза.

Если угол ψ вычисляется в градусах, то аргумент ωt также переводится в градусы; в этом случае период составляет 360° .

Величина $\omega t + \psi$, определяющая стадию изменения синусоидальной величины (3.1), называется фазовым углом или фазой. С течением времени фаза возрастает, причем после увеличения фазы на 2π цикл изменения синусоидальной величины повторяется.

Рассмотренные в данном параграфе понятия, характеризующие синусоидальные электрические величины, являются исходными при изучении электрических процессов в цепях переменного тока.

Среднее значение периодической функции $F(t)$ за период T определяется по формуле

$$F_{cp} = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt. \quad (3.3)$$

Отсюда видно, что среднее значение за период равно высоте прямоугольника с основанием T , площадь которого равна площади, ограниченной функцией $F(t)$ и осью абсцисс за один период.

В случае синусоидальной функции среднее значение за период равно нулю, так как площадь положительной полуволны компенсируется площадью отрицательной полуволны синусоиды. В связи с этим здесь пользуются понятием среднего значения функции, взятой по абсолютному значению среднего полупериодного или средневывпрямленного значения, соответствующего положительной полуволне синусоиды (рис. 3.2).

В соответствии с этим среднее значение синусоидального тока с амплитудой $A = I_m$ будет следующим:

$$I_{cp} = \frac{2I_m}{T} \int_0^{T/2} \sin \omega t dt = \frac{2I_m}{\omega T} \left| -\cos \omega t \right|_0^{T/2} = \frac{2}{\pi} I_m \approx 0,637 I_m. \quad (3.4)$$

Аналогичное среднее значение синусоидального напряжения

$$U_{cp} = \frac{2}{\pi} U_m \approx 0,637 U_m. \quad (3.5)$$

Измерительные приборы магнитоэлектрической системы реагируют на средние значения за период. Для измерения среднего полупериодного значения, соответствующего положительной полуволне, синусоидальный ток предварительно пропускается через выпрямительное устройство.

Тепловое действие тока, а также механическая сила взаимодействия двух проводников, по которым проходит один и тот же ток, пропорциональны квадрату тока, поэтому о величине тока судят обычно по так называемому действующему (среднеквадратичному) значению за период.

Действующее значение периодической функции $F(t)$ вычисляется по формуле (3.6). Из этой формулы следует, что величина

F^2 представляет собой среднее значение функции $[f(t)]^2$ за период T .

$$F = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T [f(t)]^2 dt}. \quad (3.6)$$

Эта величина равна высоте прямоугольника с основанием T , площадь которого равна площади, ограниченной функцией $[f(t)]^2$ и осью абсцисс за один период.

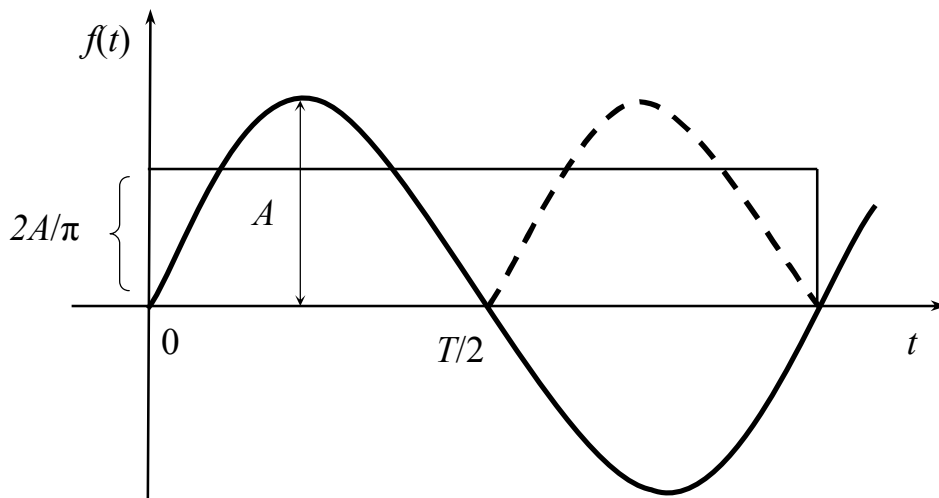


Рис. 3.2. Среднее полупериодное значение синусоидальной функции

В соответствии с (3.6) действующий периодический ток

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt}. \quad (3.7)$$

Возведя в квадрат и умножив обе части полученного выражения на rT , найдем

$$rI^2T = \int_0^T ri^2 dt.$$

Это равенство показывает, что действующий периодический ток равен такому постоянному току, который, проходя через неизменное сопротивление r , за период времени T выделяет то же количество тепла, что и данный ток i .

Аналогично действующее напряжение

$$U = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2 dt}. \quad (3.8)$$

При синусоидальном токе

$$\int_0^T i^2 dt = \int_0^T I_m^2 \sin^2 \omega t dt = \frac{I_m^2}{2} \int_0^T (1 - \cos 2\omega t) dt = \frac{I_m^2}{2} T.$$

Следовательно, согласно (3.7),

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \approx 0,707 I_m. \quad (3.9)$$

Аналогично действующее значение синусоидального напряжения

$$U = \frac{U_m}{\sqrt{2}} \approx 0,707 U_m. \quad (3.10)$$

Номинальные токи и напряжения электротехнических устройств определяются, как правило, действующими значениями, поэтому действующие значения представляют наиболее распространённый электрический параметр.

Для измерения действующих значений применяются системы приборов: тепловая, электромагнитная, электродинамическая и др.

3.2. Синусоидальный ток в сопротивлении

Если синусоидальное напряжение $u = U_m \sin(\omega t + \psi)$ подвести к сопротивлению r (рис. 3.3), то через сопротивление пройдет синусоидальный ток

$$i = \frac{U_m}{r} \sin(\omega t + \psi) = I_m \sin(\omega t + \psi).$$

Следовательно, напряжение на выводах сопротивления и ток, проходящий через это сопротивление, имеют одинаковую начальную фазу, или, как говорят, совпадают по фазе: они одновременно достигают своих амплитудных значений U_m и I_m и соответственно одновременно проходят через нуль (рис. 3.3).

Разность начальных фаз двух синусоид, имеющих одинаковую частоту, называется фазовым сдвигом.

В данном случае фазовый сдвиг между напряжением u и током i равен нулю:

$$\varphi = \psi_u - \psi_i = 0.$$

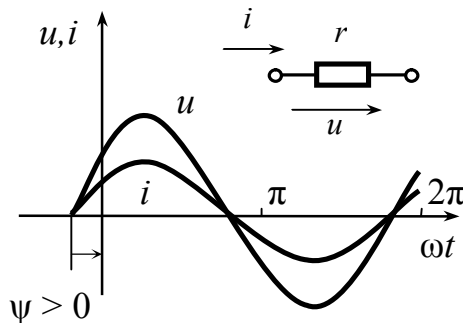


Рис. 3.3. Синусоидальный ток в сопротивлении

При прохождении синусоидального тока через сопротивление r не только мгновенные напряжения на сопротивлении и тока в нем, но и амплитуды и соответственно действующее напряжение и ток связаны законом Ома:

$$U_m = rI_m; \quad U = rI.$$

Пользуясь величиной проводимости $g = 1/r$, получаем

$$I_m = gU_m, \quad I = gU.$$

Мгновенная мощность, поступающая в сопротивление:

$$p_r = ui = U_m I_m \sin^2(\omega t + \psi) = UI [1 - \cos 2(\omega t + \psi)], \quad (3.11)$$

изменяется с угловой частотой, удвоенной по сравнению с частотой напряжения и тока, и колеблется в пределах от 0 до $2UI$.

Как видно из (3.11), кривая p_r состоит из двух слагаемых: постоянной величины UI и косинусоидальной функции, имеющей амплитуду UI и угловую частоту 2ω .

Ввиду того, что в рассматриваемом случае напряжение и ток совпадают по фазе, т. е. всегда имеют одинаковый знак (плюс или минус), их произведение всегда положительно.

Среднее значение мощности за период $P = \frac{1}{T} \int_0^T p_r dt$ называется активной мощностью и измеряется в ваттах.

В рассматриваемом случае, как видно из выражения (3.11), активная мощность $P = UI = rI^2$. Это следует также из определений, данных в предыдущем параграфе.

Сопротивление r в свою очередь может быть определено как отношение активной мощности к квадрату действующего значения тока: $r = P / I^2$.

Известно [1], что сопротивление проводника при переменном токе больше, чем при постоянном токе, вследствие явлений поверхностного эффекта, возникновения вихревых токов и излучения электромагнитной энергии в пространство (при высоких частотах).

3.3. Синусоидальный ток в индуктивности

Пусть через индуктивность L (рис. 3.4) проходит ток

$$i = I_m \sin (\omega t + \psi) .$$

Электродвижущая сила самоиндукции определяется по формуле

$$e_L = -L \frac{di}{dt} = -\omega L I_m \cos(\omega t + \psi) = -U_m \sin(\omega t + \psi + \frac{\pi}{2}) .$$

Значит, напряжение на индуктивности

$$u_L = -e_L = U_m \sin (\omega t + \psi + \frac{\pi}{2}) .$$

Полученное выражение показывает, что напряжение на индуктивности опережает ток на угол $\frac{\pi}{2}$: максимум напряжения смещен влево относительно максимума тока. Когда ток проходит через нуль, напряжение достигает положительного или отрицательного максимума, так как оно пропорционально скорости изменения тока (di / dt) , которая в момент прохождения тока через нуль максимальна (синусоида тока в этот момент имеет наибольшую крутизну). Когда ток достигает максимума, скорость его изменения, а следовательно, и напряжение на индуктивности обращаются в нуль. Под фазовым сдвигом φ понимается разность начальных фаз напряжения и тока. Следовательно, в данном случае

$$\varphi = \psi_n - \psi_i = \frac{\pi}{2} .$$

Амплитуды, так же как и действующие значения напряжения и тока, связаны соотношением, подобным закону Ома:

$$U_m = \omega L I_m = x_L I_m; \quad U = x_L I.$$

Величина $x_L = \omega L$, имеющая размерность сопротивления, называется индуктивным сопротивлением, обратная ей величина $b_L = 1/\omega L$ называется индуктивной проводимостью.

Итак,

$$I_m = b_L U_m; \quad I = b_L U.$$

Индуктивное сопротивление представляет собой расчетную величину, с помощью которой учитывается явление самоиндукции.

Мгновенная мощность, поступающая в индуктивность, будет

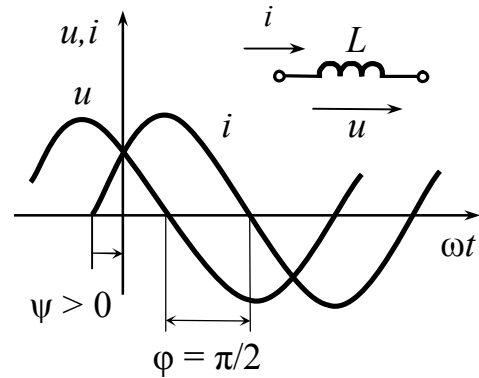


Рис. 3.4. Синусоидальный ток в индуктивности

$$\begin{aligned} p_L &= ui = U_m I_m \sin(\omega t + \psi + \frac{\pi}{2}) \sin(\omega t + \psi) = \\ &= \frac{U_m I_m}{2} 2 \cos(\omega t + \psi) \sin(\omega t + \psi) = UI \sin 2(\omega t + \psi). \end{aligned}$$

Она колеблется по синусоидальному закону с угловой частотой 2ω , имея амплитуду UI . Мгновенная мощность в данном случае равна скорости изменения энергии магнитного поля индуктивности.

Энергия магнитного поля индуктивности

$$W_L = \frac{Li^2}{2} = \frac{LI_m^2}{2} \sin^2(\omega t + \psi) = \frac{LI^2}{2} [1 - \cos 2(\omega t + \psi)]$$

изменяется периодически с угловой частотой 2ω в пределах от 0 до $\frac{LI_m^2}{2}$.

Поступая от источника, энергия временно запасается в магнитном поле индуктивности, затем возвращается в источник при исчезновении магнитного поля. Энергия магнитного поля дости-

гает максимума в момент перехода тока в индуктивности через амплитудное значение, затем она убывает и обращается в нуль при токе, равном нулю.

Таким образом, происходит колебание энергии между источником и индуктивностью, причем активная мощность, поступающая в индуктивность, равна нулю.

Так как максимальная энергия, запасаемая в магнитном поле, равна $W_{L\max} = LI^2$, то индуктивное сопротивление $x_L = \omega L$ может быть определено как

$$x_L = \frac{\omega W_{L\max}}{I^2}.$$

3.4. Синусоидальный ток в емкости

Пусть напряжение на емкости C (рис. 3.5) синусоидально:

$$u = U_m \sin(\omega t + \psi).$$

Ток в емкости

$$i = C \frac{du}{dt} = \omega C U_m \cos(\omega t + \psi) = I_m \sin(\omega t + \psi + \frac{\pi}{2}). \quad (3.12)$$

Выражение (3.12) показывает, что ток I опережает приложенное напряжение u на угол $\pi/2$ (рис. 3.5).

Нулевым значениям тока соответствуют максимальные (положительные или отрицательные) значения напряжения u . Физически это объясняется тем, что когда электрический заряд q и соответственно напряжение $u = q/C$ достигают максимального значения (положительного или отрицательного), ток i равен нулю.

Под фазовым током относительно напряжения здесь, как и раньше, подразумевается разность начальных фаз напряжения и тока, т. е.

$$\varphi = \psi_u - \psi_i = -\pi/2.$$

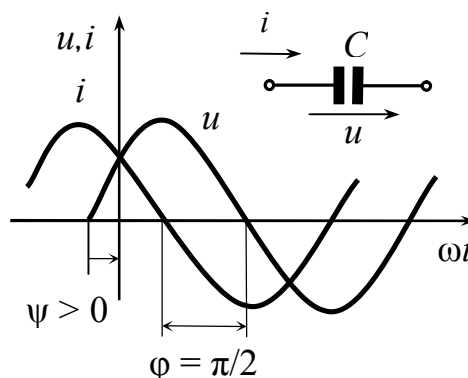


Рис. 3.5. Синусоидальный ток в емкости

Таким образом, в отличие от цепи с индуктивностью, где $\varphi = +\pi/2$, фазовый сдвиг тока относительно напряжения в случае емкости отрицателен ($\varphi = -\pi/2$).

Амплитуды и соответственно действующие напряжение и ток связаны соотношением, подобным закону Ома:

$$U_m = \frac{1}{\omega C} I_m = x_C I_m; \quad U = x_C I.$$

Величина $x_C = 1/\omega C$, имеющая размерность сопротивления, называется емкостным сопротивлением. Обратная ей величина $b_C = \omega C$ называется емкостной проводимостью. Следовательно,

$$I_m = b_C U_m; \quad I = b_C U.$$

Энергия электрического поля емкости

$$W_C = \frac{Cu^2}{2} = \frac{CU_m^2}{2} \sin^2(\omega t + \psi) = \frac{CU^2}{2} [1 - \cos 2(\omega t + \psi)]$$

изменяется периодически с угловой частотой 2ω в пределах от 0 до $\frac{CU_m^2}{2}$.

Поступая от источника, энергия временно запасается в электрическом поле емкости, затем возвращается в источник при исчезновении электрического поля. Энергия электрического поля достигает максимума при амплитудном значении напряжения на емкости. Затем она убывает и обращается в нуль при напряжении, равном нулю.

Таким образом, так же как и в случае индуктивности, происходит колебание энергии между источником и емкостью, причем активная мощность $P = 0$.

Так как максимальная энергия, запасаемая в электрическом поле, равна $W_{L\max} = CU^2$, то емкостное сопротивление $x_C = U/I = 1/\omega C$ может быть определено как

$$x_C = \frac{\omega W_{C\max}}{I^2}.$$

3.5. Последовательное соединение R, L, C

При прохождении синусоидального тока $i = I_m \sin \omega t$ через электрическую цепь, состоящую из последовательно соединенных элементов r, L и C (рис. 3.6), на выводах этой цепи создается синусоидальное напряжение, равное алгебраической сумме синусоидальных напряжений на отдельных элементах (второй закон Кирхгофа):

$$u = u_r + u_L + u_C.$$

Напряжение u_r на сопротивлении r совпадает по фазе с током i , напряжение u_L на индуктивности L опережает, а напряжение u_C

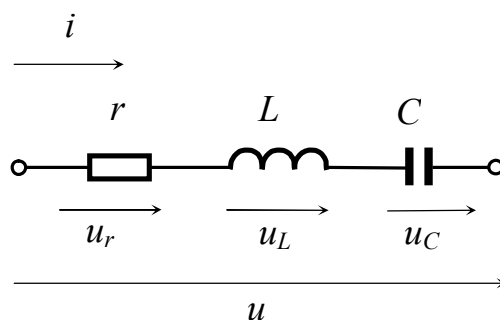


Рис. 3.6. Последовательное соединение сопротивления, индуктивности и емкости

на емкости C отстает по фазе от i на $\frac{\pi}{2}$. Следовательно, напряжение u на выводах цепи следующее:

$$\begin{aligned} U_m \sin(\omega t + \varphi) &= rI_m \sin \omega t + \omega L I_m \cos \omega t - \frac{1}{\omega C} I_m \cos \omega t = \\ &= rI_m \sin \omega t + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) I_m \cos \omega t = I_m \left[r \sin \omega t + x \cos \omega t \right] \end{aligned} \quad (3.13)$$

Уравнение (3.13) представляет собой тригонометрическую форму записи второго закона Кирхгофа для мгновенных напряжений. Входящая в него величина $x = x_L - x_C = \omega L - \frac{1}{\omega C}$ называется реактивным сопротивлением цепи, которое в зависимости от знака может иметь индуктивный ($x > 0$) или емкостный характер ($x < 0$).

В отличие от реактивного сопротивления X активное сопротивление r всегда положительно.

Для нахождения U_m и φ воспользуемся следующими тригонометрическими соотношениями:

$$\left. \begin{aligned} m \sin \alpha \pm n \cos \alpha &= \sqrt{m^2 + n^2} \sin(\alpha \pm \varphi); \\ \varphi &= \operatorname{arctg} \frac{n}{m}. \end{aligned} \right\} \quad (3.14)$$

Итак,

$$U_m = \sqrt{r^2 + x^2} I_m; \quad (3.15)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{x}{r}. \quad (3.16)$$

Выражение (3.15) показывает, что амплитуда и действующее напряжение и ток, проходящий через данную цепь, связаны соотношением, аналогичным закону Ома,

$$U_m = z I_m, \quad U = z I,$$

где

$$z = \sqrt{r^2 + x^2}, \quad (3.17)$$

называется полным сопротивлением рассматриваемой цепи.

Активное, реактивное и полное сопротивления относятся к числу основных понятий, применяемых в теории электрических цепей.

Выражения (3.13) и (3.16) показывают, что ток i отстает от напряжения u на угол $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{x}{r}$.

Если задано напряжение $u = U_m \sin(\omega t + \psi)$ на выводах цепи с последовательно соединенными r , L и C , то ток определяется по формуле

$$i = \frac{U_m}{z} \sin(\omega t + \psi - \varphi).$$

Угол φ , равный разности начальных фаз напряжения и тока, отсчитывается по оси ωt в направлении от напряжения к току и бывает острым или прямым:

$$|\varphi| \leq \frac{\pi}{2}.$$

Угол φ положителен при индуктивном характере цепи, т. е. при $x > 0$; при этом ток отстает по фазе от напряжения и отсчитывается по оси абсцисс вправо от напряжения к току (рис. 3.7).

Угол φ отрицателен при емкостном характере цепи, т. е. при $x < 0$; при этом ток опережает по фазе напряжение и φ отсчитывается по оси абсцисс влево от напряжения к току (рис. 3.8).

Итак, следует всегда помнить, что угол φ положителен при отстающем и отрицателен при опережающем токе.

Ток совпадает с напряжением по фазе при $x = x_L - x_C = 0$, т. е. при равенстве индуктивного и емкостного сопротивлений. Такой режим работы электрической цепи называется резонансом напряжений.

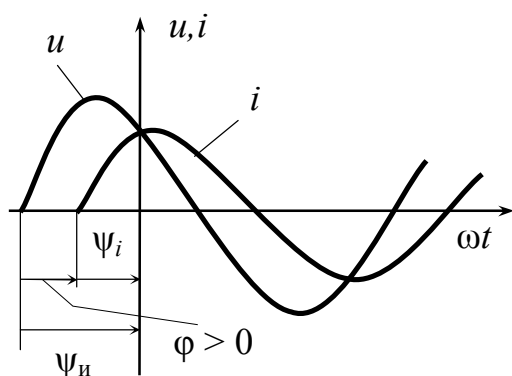


Рис. 3.7. Ток отстает от напряжения

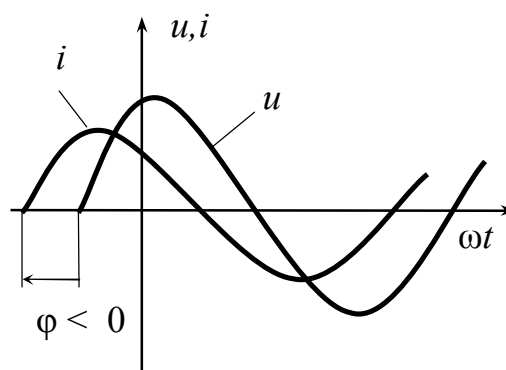


Рис. 3.8. Ток опережает напряжение

Из выражений (3.16) и (3.17) следует, что активное и реактивное сопротивления цепи связаны с полным сопротивлением формулами

$$r = z \cos \varphi, \quad x = z \sin \varphi. \quad (3.18)$$

Умножив правые и левые части выражений (3.18) на действующий ток I , получим действующие напряжения на активном и реактивном сопротивлениях, называемые активной и реактивной составляющими напряжения:

$$\left. \begin{aligned} U_a &= rI = z \cos \varphi I = U \cos \varphi; \\ U_p &= xI = z \sin \varphi I = U \sin \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (3.19)$$

Мгновенные значения напряжений на активном и реактивном сопротивлениях, суммирующиеся алгебраически, имеют фазовый сдвиг $\frac{\pi}{2}$. По этой причине непосредственное сложение действующих активного и реактивного напряжений не дает действующего напряжения всей цепи: согласно (3.19), активная и реактивная составляющие напряжения связаны с действующим суммарным напряжением формулой

$$U = \sqrt{U_a^2 + U_p^2}.$$

Для характеристики индуктивных катушек, представляемых цепью с последовательным соединением элементов r и L , пользуются понятием добротности катушки $Q_L = x_L / r = \omega L / r$, которое равнозначно тангенсу угла сдвига фаз для катушки. Чем меньше сопротивление r , тем выше при прочих равных условиях добротность катушки.

Добротность индуктивных катушек, применяемых в радиотехнике, автоматике и приборостроении, обычно не превышает $Q_L = 200 - 300$. Для достижения более высокой добротности применяются так называемые пьезоэлектрические резонаторы.

3.6. Параллельное соединение R, L, C

Если к выводам электрической цепи, состоящей из параллельно соединенных элементов r, L и C (рис. 3.9), приложено синусоидальное напряжение $u = U_m \sin \omega t$, то синусоидальный ток, проходящий через эту цепь, равен алгебраической сумме синусоидальных токов в параллельных ветвях (первый закон Кирхгофа):

$$i = i_r + i_L + i_C.$$

Ток i_r в сопротивлении r совпадает по фазе с напряжением u , ток i_L в индуктивности L отстает, а ток i_C в емкости C опережает напряжение на $\pi/2$.

Следовательно, суммарный ток в цепи

$$\begin{aligned}
 I_m \sin(\omega t - \varphi) &= \frac{1}{r} U_m \sin \omega t - \frac{1}{\omega L} U_m \cos \omega t + \omega C U_m \cos \omega t = \\
 &= U_m \left[\frac{1}{r} \sin \omega t - \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C \right) \cos \omega t \right] = U_m [g \sin \omega t + b \cos \omega t].
 \end{aligned}
 \quad (3.20)$$

Уравнение (3.20) представляет собой тригонометрическую форму записи первого закона Кирхгофа для мгновенных токов. Входящая в него величина

$$b = b_L - b_C = \frac{1}{\omega L} - \omega C$$
 называется ре-

активной проводимостью цепи, которая в зависимости от знака может иметь индуктивный ($b > 0$) или емкостный ($b < 0$) характер. В отличие от реактивной проводимости b величина $g = 1/r$, которая в данном случае называется активной проводимостью, всегда положительна.

Для нахождения I_m и φ воспользуемся следующими соотношениями:

$$I_m = \sqrt{g^2 + b^2} U_m = y U_m, \quad (3.21)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{g}. \quad (3.22)$$

Из (3.21) следует, что

$$I_m = y U_m \quad \text{или} \quad I = y U,$$

где

$$y = \sqrt{g^2 + b^2} \quad (3.23)$$

полная проводимость рассматриваемой цепи.

Активная, реактивная и полная проводимости относятся к числу основных понятий, применяемых в теории электрических цепей.

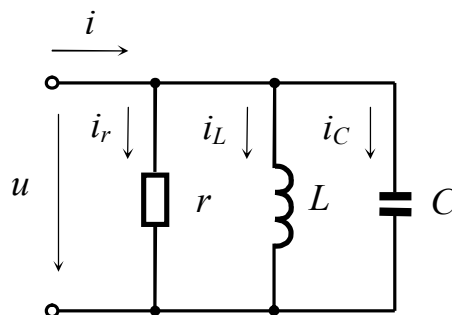


Рис. 3.9. Параллельное соединение сопротивления, индуктивности и емкости

Согласно (3.22), ток в неразветвленном участке цепи i отстает от напряжения u на угол

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{b}{g} = \operatorname{arctg} \frac{\frac{1}{\omega C} - \omega L}{g}.$$

Если задано напряжение $u = U_m \sin(\omega t + \psi)$ на выводах цепи с параллельно соединенными r , L и C , то ток определяется по формуле

$$i = y U_m \sin(\omega t + \psi - \varphi).$$

Угол φ , как и в предыдущем случае, отсчитывается по оси углов ωt в направлении от напряжения к току и является острым или прямым:

$$0 < \varphi < \frac{\pi}{2}.$$

Угол φ положителен при индуктивном характере цепи, т. е. при $b > 0$; при этом ток отстает по фазе от напряжения.

Угол φ отрицателен при емкостном характере цепи, т. е. при $b < 0$; при этом ток опережает по фазе напряжение.

Ток совпадает с напряжением по фазе при $b = b_L - b_C = 0$, т. е. при равенстве индуктивной и емкостной проводимости. Такой режим работы электрической цепи называется резонансом токов.

Из (3.22) и (3.23) следует, что активная и реактивная проводимости цепи связаны с полной проводимостью формулами:

$$g = y \cos \varphi; \quad b = y \sin \varphi. \quad (3.24)$$

Умножив правые и левые части выражений (3.24) на действующие значения напряжения U , получим действующие значения токов в ветвях с активной и реактивной проводимостями, называемые активной и реактивной составляющими тока:

$$\left. \begin{aligned} I_a &= gU = y \cos \varphi U = I \cos \varphi; \\ I_p &= bU = y \sin \varphi U = I \sin \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (3.25)$$

Активная и реактивная составляющие тока связаны с действующим значением суммарного тока формулой

$$I = \sqrt{I_a^2 + I_p^2}.$$

Для характеристики конденсаторов, представляемых цепью с параллельным соединением элементов r и C , применяется понятие добротности конденсатора $Q_C = b_C / g = \omega C r$, которое равнозначно тангенсу угла $|\varphi|$ конденсатора. Обратная величина называется тангенсом угла диэлектрических потерь конденсатора: $\operatorname{tg} \delta = 1 / Q_C$ (угол диэлектрических потерь δ дополняет угол $|\varphi|$ до 90°).

Чем больше сопротивление r , тем больше (при прочих равных условиях) добротность конденсатора и тем меньше угол потерь.

Добротность конденсаторов, применяемых в радиотехнике, автоматике и приборостроении, определяется сотнями и тысячами.

3.7. Мощность в цепи синусоидального тока

Ранее рассматривались энергетические соотношения в отдельных элементах r , L и C при синусоидальном токе.

Разберем теперь более общий случай участка электрической цепи, напряжение на котором равно $U = U_m \sin \omega t$, а ток

$$I = I_m \sin (\omega t - \varphi).$$

Мгновенная мощность, поступающая в цепь,

$$P = U_m I_m \sin (\omega t) \sin (\omega t - \varphi) \quad (3.26)$$

состоит из двух слагаемых: постоянной величины $UI \cos \varphi$ и синусоидальной, имеющей удвоенную частоту по сравнению с частотой напряжения и тока.

Среднее значение второго слагаемого за время T , в течение которого она совершает два цикла изменений, равно нулю, поэтому активная мощность, поступающая в рассматриваемый участок цепи,

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T i u dt = UI \cos \varphi. \quad (3.27)$$

Множитель $\cos \varphi$ носит название коэффициента мощности. Как видно из (3.27), активная мощность равна произведению действующих значений напряжения и тока, умноженному на коэффициент мощности.

Чем ближе угол φ к нулю, тем ближе $\cos \varphi$ к единице и, следовательно, тем большая при заданных значениях U и I активная мощность передается источником приемнику.

Повышение коэффициента мощности промышленных электроустановок представляет важную технико-экономическую задачу.

Выражение активной мощности может быть преобразовано с учетом (3.18) и (3.24):

$$P = z I^2 \cos \varphi = r I^2, \\ P = y U^2 \cos \varphi = g U^2.$$

Активная мощность может быть также выражена через активную составляющую напряжения ($U_a = U \cos \varphi$) или активную составляющую тока ($I_a = I \cos \varphi$):

$$P = U_a I, \quad P = U I_a.$$

Рассмотрим более общий случай активно-реактивной цепи, например цепи, содержащей сопротивление и индуктивность; при этом

$$0 < \varphi < \frac{\pi}{2} \quad \text{и} \quad 0 < \cos \varphi < 1.$$

Согласно (3.26) мгновенная мощность колеблется с удвоенной угловой частотой 2ω относительно линии, отстоящей от оси времени на $P = UI \cos \varphi$.

В промежутки времени, когда U и I имеют одинаковые знаки, мгновенная мощность положительна; энергия поступает от источника в приемник, поглощается в сопротивлении и запасается в магнитном поле индуктивности.

В электрических системах, в которых источниками электрической энергии являются генераторы переменного тока, мощность получается от первичных двигателей, приводящих генераторы во вращение. В радиотехнике и электронике, где синусоидальные колебания создаются с помощью электронных или

полупроводниковых приборов, мощность получается от источников постоянного тока, питающих электронные генераторы или другого рода устройства.

Величина, равная произведению действующих тока и напряжения,

$$S = UI \quad (3.28)$$

называется полной мощностью и измеряется в вольт-амперах (ВА). Следует заметить, что амплитуда синусоидальной составляющей мгновенной мощности численно равна полной мощности.

На основании (3.27) и (3.28) коэффициент мощности равен отношению активной мощности к полной:

$$\cos \varphi = P/S.$$

При расчетах электрической цепи и на практике в эксплуатации пользуются также понятием *реактивная мощность*, которая вычисляется по формуле

$$Q = UI \sin \varphi$$

и является мерой потребления (или выработки) реактивного тока. Эта мощность выражается в единицах, называемых вар. Очевидно

$$S^2 = P^2 + Q^2, \quad \sin \varphi = Q/S, \quad \operatorname{tg} \varphi = Q/P.$$

Выражение реактивной мощности может быть преобразовано с учетом (3.18) и (3.24):

$$Q = zI^2 \sin \varphi = xI^2, \quad Q = yU^2 \sin \varphi = bU^2.$$

Реактивная мощность может быть также выражена через реактивную составляющую тока ($I_p = I \sin \varphi$) или реактивную составляющую напряжения ($U_p = U \sin \varphi$):

$$Q = U_p I, \quad Q = UI_p.$$

В соответствии с принятым ранее правилом знаков для угла φ реактивная мощность положительна при отстающем токе (индуктивная нагрузка) и отрицательна при опережающем токе (емкостная нагрузка).

Понятия активная (средняя), реактивная и полная мощности являются удобными определениями мощностей, которые прочно укоренились на практике.

Реактивные мощности, приводимые к индуктивности и емкости, могут быть представлены в следующем виде:

$$Q_L = UI \sin \frac{\pi}{2} = UI = \omega LI^2 = \omega \frac{LI_m^2}{2} = \omega W_{L \max};$$

$$Q_C = UI \sin \left(-\frac{\pi}{2}\right) = -UI = -\omega CU^2 = -\omega \frac{CU_m^2}{2} = -\omega W_{C \max},$$

где $W_{L \max}$ и $W_{C \max}$ – максимальные значения энергии, периодически запасаемой индуктивностью и емкостью.

Реактивная мощность цепи, содержащей индуктивность и емкость, пропорциональна разности максимальных значений энергии, запасаемой в магнитном и электрическом полях:

$$Q = \omega (W_{L \max} - W_{C \max}). \quad (3.29)$$

Читателям предлагается проверить и самостоятельно убедиться в том, что эта формула справедлива при любом соединении индуктивности и емкости: последовательном, параллельном или в какой-либо комбинации с сопротивлениями.

3.8. Представление синусоидальных функций в виде проекции вращающихся векторов

Тригонометрическая форма расчета электрических цепей синусоидального тока, рассмотренная ранее, практически применяется только для простейших электрических цепей, не содержащих

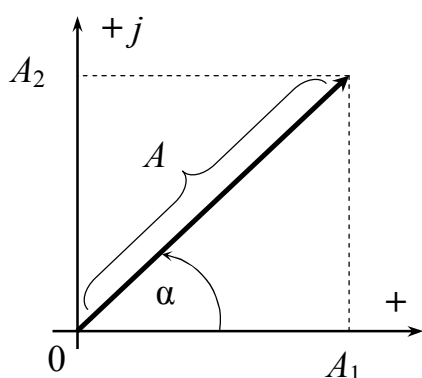


Рис. 3.10. Вектор, изображающий комплексное число

большого числа контуров и источников, взаимных индуктивностей.

С усложнением электрических цепей тригонометрическая форма расчета становится крайне затруднительной и требуется метод, позволяющий рассчитывать электрические цепи переменного тока алгебраически, аналогично цепям постоянного тока. Таким удобным расчетным методом служит метод комплексных амплитуд (комплексный метод), ос-

нованный на замене рассмотрения синусоидальных функций рассмотрением вращающихся векторов.

Известно, что каждая точка на комплексной плоскости определяется радиусом-вектором этой точки, т. е. вектором, начало которого совпадает с началом координат, а конец находится в точке, соответствующей заданному комплексному числу (рис. 3.10). Пользуясь показательной или полярной формой записи комплексного числа, имеем

$$\dot{A} = Ae^{j\alpha} = A\angle\alpha,$$

где A – модуль;

α – аргумент или фаза.

Применив формулу Эйлера, можно получить тригонометрическую форму записи комплексного числа

$$\dot{A} = A\cos\alpha + jA\sin\alpha$$

или, соответственно, алгебраическую форму

$$\dot{A} = A_1 + jA_2,$$

где

$$A_1 = A\cos\alpha, \quad A_2 = A\sin\alpha.$$

Очевидно, что

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2, \quad \alpha = \operatorname{arctg} \frac{A_2}{A_1}.$$

Вектор, вращающийся в положительном направлении, т. е. против часовой стрелки, с угловой скоростью ω , может быть выражен следующим образом:

$$Ae^{j(\omega t + \alpha)} = \dot{A}e^{j\omega t}, \quad (3.30)$$

где $\dot{A} = Ae^{j\alpha}$ – комплексная амплитуда, представляющая данный вектор в момент $t = 0$. Иначе говоря, это комплексная величина, не зависящая от времени, модуль и аргумент которой равны соответственно амплитуде и начальной фазе заданной синусоидальной функции.

Множитель $e^{j\omega t}$ является оператором вращения. Умножение комплексной амплитуды \dot{A} на $e^{j\omega t}$ означает поворот вектора \dot{A} на угол ωt в положительном направлении.

Записывая комплексную функцию (3.30) в тригонометрической форме

$$Ae^{j(\omega t + \alpha)} = A \cos(\omega t + \alpha) + jA \sin(\omega t + \alpha),$$

заключаем, что синусоидальная функция может рассматриваться как мнимая часть комплексной функции, взятая без множителя j , или, что то же, как проекция вращающегося вектора на мнимую ось.

Условно это записывается так:

$$A \sin(\omega t + \alpha) = \text{Im}(\dot{A} e^{j\omega t}).$$

Символ Im обозначает, что берется мнимая часть комплексной функции.

Аналогично косинусоидальная функция может быть в случае необходимости представлена как действительная часть комплексной функции (3.30):

$$A \cos(\omega t + \alpha) = \text{Re}(\dot{A} e^{j\omega t}),$$

где символ Re обозначает, что берется действительная часть комплексной функции.

Если синусоидальные функции имеют одну и ту же частоту, то соответствующие этим функциям векторы вращаются с одинаковой угловой скоростью и поэтому углы между ними сохраняются неизменными.

Векторное представление синусоидальных функций, частота которых одинакова, облегчает операции сложения и вычитания этих функций. Ввиду того что сумма проекций двух векторов равна проекции геометрической суммы этих векторов, амплитуда и начальная фаза результирующей кривой могут быть найдены из векторной диаграммы.

3.9. Законы Ома и Кирхгофа в комплексной форме

Рассмотрим применение метода комплексных амплитуд в случае последовательного и параллельного соединений r , L и C .

3.9.1. Последовательное соединение r , L и C

Положим, что в уравнении Кирхгофа

$$u = ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt \quad (3.31)$$

заданными являются величины r , L , C и синусоидальное напряжение $U = U_m \sin(\omega t + \varphi)$ на цепи, а искомой величиной является ток I . Ввиду того, что здесь рассматривается установившийся режим цепи синусоидального тока, решение этого дифференциального уравнения должно дать синусоидальную функцию вида

$$I = I_m \sin(\omega t + \varphi - \psi),$$

где I_m и $(\varphi - \psi)$ – пока неизвестные амплитуда и начальная фаза тока.

Пусть в соответствии с предыдущим параграфом заданное синусоидальное напряжение символизируется комплексной функцией $\dot{U}_m e^{j\omega t}$, а искомый синусоидальный ток – комплексной функцией $\dot{I}_m e^{j\omega t}$; комплексные амплитуды напряжения и тока равны соответственно:

$$\dot{U} = U_m e^{j\psi}, \quad \dot{I} = I_m e^{j(\psi - \varphi)}.$$

Сложение, дифференцирование и интегрирование синусоидальных функций в уравнении (3.31) заменяются теми же математическими операциями над мнимыми частями комплексных функций:

$$\text{Im}(\dot{U}_m e^{j\omega t}) = r \text{Im}(\dot{I}_m e^{j\omega t}) + L \frac{d}{dt} \text{Im}(\dot{I}_m e^{j\omega t}) + \frac{1}{C} \int \text{Im}(\dot{I}_m e^{j\omega t}) dt. \quad (3.32)$$

Операции над мнимыми частями комплексных функций могут быть заменены операциями над самими комплексными функциями. Объясняется это коммутативностью операций сложения, дифференцирования и интегрирования относительно символической операции I_m . Итак, (3.32) преобразуется следующим образом:

$$\text{Im}(\dot{U}_m e^{j\omega t}) = \text{Im}(r \dot{I}_m e^{j\omega t} + L \frac{d}{dt} \dot{I}_m e^{j\omega t} + \frac{1}{C} \int \dot{I}_m e^{j\omega t} dt).$$

Полученное уравнение удовлетворяется для любого момента времени. Поэтому заключенные в скобки комплексные выражения, от которых берется мнимая часть, должны быть равны друг другу. Производя дифференцирование и интегрирование, получаем:

$$\dot{U}_m e^{j\omega t} = r \dot{I}_m e^{j\omega t} + j\omega L \dot{I}_m e^{j\omega t} + \frac{1}{j\omega C} \dot{I}_m e^{j\omega t}. \quad (3.33)$$

Здесь следует обратить внимание на то, что при интегрировании функции $e^{j\omega t}$ постоянная интегрирования опущена, так как в рассматриваемом установившемся режиме цепи синусоидального тока электрические заряды или напряжения на емкостях представляют собой синусоидальные функции, не содержащие постоянных слагающих.

В результате сокращения всех частей уравнения (3.33) на множитель $e^{j\omega t}$ получается алгебраическое комплексное уравнение

$$\dot{U}_m = r \dot{I}_m + j\omega L \dot{I}_m + \frac{1}{j\omega C} \dot{I}_m. \quad (3.34)$$

Ток \dot{I}_m может быть вынесен за скобки. При этом вводится условное обозначение для комплексного сопротивления рассматриваемой электрической цепи:

$$Z = r + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = r + jx. \quad (3.35)$$

Таким образом, получается уравнение

$$\dot{U}_m = Z \dot{I}_m, \quad (3.36)$$

выражающее закон Ома для комплексных амплитуд.

Разделив обе части уравнения (3.36) на $\sqrt{2}$, получим закон Ома для комплексных действующих значений:

$$\dot{U} = Z \dot{I}. \quad (3.37)$$

Следовательно, комплексное сопротивление электрической цепи равно отношению комплексного напряжения на данной цепи к комплексному току в этой цепи.

Комплексное сопротивление Z представлено в выражении (3.35) в алгебраической форме. Та же величина в тригонометрической и показательной формах имеет вид:

$$\begin{aligned} Z &= z \cos \varphi + jz \sin \varphi; \\ Z &= ze^{j\varphi}. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Здесь $z = |Z|$ – модуль комплексного числа Z – представляет собой полное сопротивление цепи, а φ – аргумент комплексного числа Z :

$$z = \sqrt{r^2 + x^2}, \quad \varphi = \arctg \frac{x}{r}.$$

На основании (3.36) комплексная амплитуда тока

$$\dot{I}_m = \frac{\dot{U}_m}{Z} = \frac{U_m}{z} e^{j(\psi - \varphi)} = \frac{U_m}{z} \angle(\psi - \varphi),$$

где $(\psi - \varphi)$ – начальная фаза тока.

Следовательно, искомый ток в тригонометрической форме

$$i = I_m (I_m e^{j\omega t}) = \frac{U_m}{z} \sin(\omega t + \psi - \varphi).$$

3.9.2. Параллельное соединение r , L и C

Пользуясь рассуждениями, аналогичными приведенным выше, можно прийти к комплексной форме законов Ома и Кирхгофа для электрической цепи, состоящей из элементов r , L и C , соединенных параллельно (см. рис. 3.9).

Ограничиваясь записью для комплексных действующих значений, пропорциональных комплексным амплитудам, имеем в соответствии с первым законом Кирхгофа:

$$\dot{I} = g\dot{U} + \frac{1}{j\omega L}\dot{U} + j\omega C\dot{U} = \dot{I}_r + \dot{I}_L + \dot{I}_C, \quad (3.39)$$

где $\dot{I}_r = g\dot{U}$ – ток в сопротивлении r (совпадает по фазе с напряжением \dot{U});

$\dot{I}_L = -j \frac{1}{\omega L} \dot{U}$ – ток в индуктивности (отстает от напряжения на $\pi/2$);

$\dot{I}_C = j\omega C \dot{U}$ – ток в емкости (опережает напряжения на $\pi/2$).

Выражение

$$Y = g - j\left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right) = g - jb \quad (3.40)$$

представляет собой комплексную проводимость рассматриваемой цепи; g и b – активная и реактивная проводимость цепи.

Уравнение

$$\dot{I} = Y \dot{U} \quad (3.41)$$

выражает закон Ома в комплексной форме. Следовательно, комплексная проводимость электрической цепи равна отношению комплексного тока в данной цепи к комплексному напряжению на ее выводах.

Тригонометрическая и показательная (полярная) формы комплексной проводимости имеют следующий вид:

$$Y = y \cos \varphi + jy \sin \varphi, \quad Y = ye^{-j\varphi},$$

здесь $y = |Y|$ – модуль комплексного числа Y представляет собой полную проводимость цепи, а $(-\varphi)$ – аргумент комплексного числа Y :

$$y = \sqrt{g^2 + b^2}; \quad \varphi = \arctg \frac{b}{g}.$$

На основании (3.41) комплексный ток равен:

$$\dot{I} = y U e^{j(\psi - \varphi)} = y U \angle (\psi - \varphi),$$

что соответствует синусоидальному току

$$i = \operatorname{Im}(\dot{I}_m e^{j\omega t}) = y U_m \sin(\omega t + \psi - \varphi).$$

3.10. Комплексная форма записи мощности

Допустим, что проходящие через электрическую цепь синусоидальный ток и напряжение на выходах цепи приняты совпадающими по направлению (рис. 3.11, а).

Комплексный ток и напряжения равны соответственно

$$\dot{I} = I \angle \psi_1 \quad \text{и} \quad \dot{U} = U \angle \psi_2.$$

Фазовый сдвиг тока относительно напряжения равен разности начальных фаз:

$$\varphi = \psi_2 - \psi_1.$$

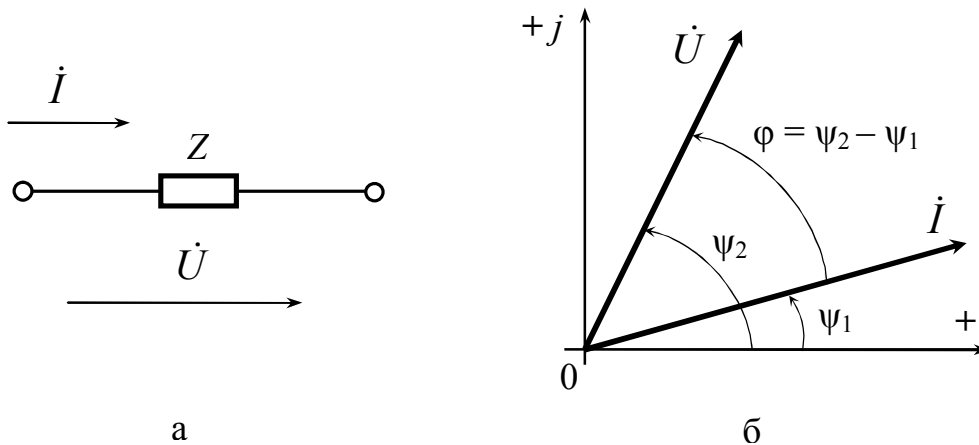


Рис. 3.11. Положительные направления (а) и комплексные напряжения (б)

Умножим \dot{U} на комплексное значение $\dot{I}^* = I \angle \psi_1^*$, сопряженное с \dot{I} :

$$\dot{U} \dot{I}^* = UI \angle (\psi_2 - \psi_1) = UI \angle \varphi.$$

Отсюда следует, что

$$\tilde{S} = \dot{U} \dot{I}^* = UI \cos \varphi + jUI \sin \varphi = P + jQ.$$

Так как напряжение \dot{U} может рассматриваться как сумма активной и реактивной слагаемых ($\dot{U} = \dot{U}_a + \dot{U}_p$), то умножение этих слагаемых на комплексное значение тока \dot{I}^* дает активную и реактивную мощности:

$$\dot{U}_a \dot{I}^* + \dot{U}_p \dot{I}^* = U \cos \varphi I \angle 0^\circ + U \sin \varphi I \angle \frac{\pi}{2} = P + jQ.$$

Аналогично мощность может быть выражена через активный и реактивный токи.

Таким образом, комплексная величина \tilde{S} определяет действительной частью активную мощность, а мнимой частью реактивную мощность, поступающую в цепь.

Модуль S равен полной мощности. \tilde{S} носит название мощности в комплексной форме или комплексной мощности.

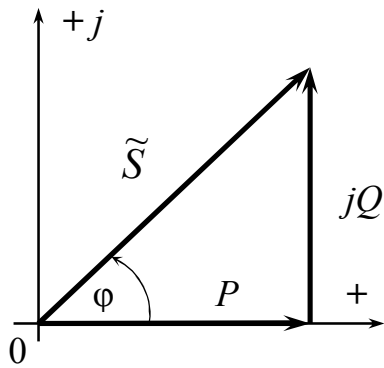


Рис. 3.12. Треугольник мощностей на комплексной плоскости

На комплексной плоскости \tilde{S} изображает гипотенузу прямоугольного треугольника, катетами которого служат P и Q (рис. 3.12).

Треугольник мощностей, изображенный на рис. 3.12, подобен треугольнику сопротивлений:

$$\frac{Q}{P} = \frac{x}{r} = \operatorname{tg} \varphi.$$

Если комплексно сопряженное напряжение \dot{U}^* умножить на комплексный ток \dot{I} , то получится:

$$\dot{U}^* \dot{I} = UI \cos \varphi - jUI \sin \varphi = P - jQ.$$

В связи с этим активная мощность P и реактивная мощность Q на выходе цепи могут быть записаны в следующем виде:

$$P = \frac{1}{2} (\dot{U}^* \dot{I} + \dot{U} \dot{I}^*);$$

$$Q = \frac{1}{2j} (\dot{U}^* \dot{I} - \dot{U} \dot{I}^*).$$

Комплексное сопротивление цепи легко вычислить если известны комплексная мощность \tilde{S} и действующее значение тока I :

$$\tilde{S} = \dot{U}^* \dot{I} = Z \dot{I}^* \dot{I} = Z I^2, \quad Z = \frac{\tilde{S}}{I^2} = \frac{P}{I^2} + j \frac{Q}{I^2}.$$

Откуда:

$$Z = \frac{P}{I^2} + j \frac{\omega}{I^2} (W_{L \max} - W_{C \max}).$$

Эта формула справедлива при любой схеме соединений сопротивлений, индуктивностей и емкостей.

Энергетический метод определения комплексного сопротивления применим и к комплексной проводимости:

$$\tilde{S} = \dot{U} \dot{I}^* = \dot{U} \dot{U}^* \dot{Y}^* = U^2 \dot{Y}^*,$$

где \dot{Y}^* – комплексная проводимость, сопряженная с \dot{Y} .

Откуда следует, что

$$\dot{Y}^* = \frac{\tilde{S}}{U^2}.$$

Следовательно,

$$Y = \frac{P}{U^2} - j \frac{Q}{U^2} = \frac{P}{U^2} + j \frac{\omega}{U^2} (W_{L \max} - W_{C \max}).$$

Итак, активные сопротивление и проводимость цепи зависят от поглощаемой цепью активной мощности, а реактивные сопротивления и проводимость – от разности максимальных значений энергии, запасаемой в магнитных и электрических полях.

Глава 4

ИНДУКТИВНО СВЯЗАННЫЕ ЦЕПИ

4.1. Основные положения и определения

При изменении магнитного поля, связанного с каким-либо витком, в последнем наводится ЭДС, которая в соответствии с законом электромагнитной индукции определяется скоростью изменения магнитного потока независимо от того, чем вызвано изменение потока. В катушке, состоящей из большого числа витков, наводится ЭДС, пропорциональная скорости изменения потокосцепления, т. е. скорости изменения суммы магнитных потоков, сцепленных с отдельными витками данной катушки. Если все витки катушки пронизываются одним и тем же магнитным потоком, то потокосцепление равно произведению магнитного потока на число витков.

При рассмотрении цепей синусоидального тока до сих пор учитывалось явление самоиндукции, т. е. наведение ЭДС в электрической цепи при изменении потокосцепления самоиндукции, обусловленного током в этой цепи. Отношение потокосцепления самоиндукции к току характеризовалось скалярной величиной – индуктивностью L .

Теперь нам предстоит заняться рассмотрением явления взаимной индукции, т. е. наведения ЭДС в электрической цепи при изменении потокосцепления взаимной индукции, обусловленного током в другой электрической цепи. Цепи, в которых наводятся ЭДС взаимной индукции, называются индуктивно связанными цепями.

Связь потокосцепления взаимной индукции одной электрической цепи с током в другой цепи, равная отношению потокосцепления взаимной индукции в одной цепи к току в другой цепи, характеризуется взаимной индуктивностью M , которая, так же как и индуктивность, представляет собой скалярную величину.

Если потокосцепление $w_1 \Phi_{M_2}$ первой цепи обусловлено током i_2 второй цепи, то взаимная индуктивность цепей определяется как

$$M_{12} = \frac{w_1 \Phi_{M_2}}{i_2}. \quad (4.1)$$

Соответственно, если потокосцепление $w_2 \Phi_{M_1}$ второй цепи обусловлено током i_1 первой цепи, то

$$M_{21} = \frac{w_2 \Phi_{M_1}}{i_1}. \quad (4.2)$$

Для линейных электрических цепей всегда выполняется равенство

$$M_{12} = M_{21},$$

и поэтому индексы у параметров взаимной индуктивности могут быть опущены.

Справедливость последнего равенства можно доказать, если выразить потоки взаимной индукции Φ_{M_1} и Φ_{M_2} через соответствующие магнитодвижущие силы (МДС) $i_1 w_1$ и $i_2 w_2$ и магнитную проводимость путей, по которым замыкаются эти потоки.

$$\Lambda_M = \sum \frac{\mu_a S}{l};$$

$$\left. \begin{aligned} M_{12} &= \frac{w_1 (i_2 w_2 \Lambda_M)}{i_2} = w_1 w_2 \Lambda_M; \\ M_{21} &= \frac{w_2 (i_1 w_1 \Lambda_M)}{i_1} = w_1 w_2 \Lambda_M. \end{aligned} \right\} \quad (4.3)$$

Отсюда также видно, что величина M пропорциональна произведению чисел витков катушек и магнитной проводимости пути общего потока, которая зависит от магнитной проницаемости среды и взаимного расположения катушек.

На основании сказанного формулируется свойство взаимности для индуктивно связанных цепей: если ток, проходящий в первой цепи, обуславливает во второй цепи потокосцепление

взаимной индукции $w_2 \Phi_{M_1}$, то такой же ток, проходящий во второй цепи, обусловит в первой цепи потокосцепление взаимной индукции $w_1 \Phi_{M_2}$ той же величины.

4.2. Полярности индуктивно связанных катушек. ЭДС взаимной индукции

Напомним, что положительные направления тока и создаваемого им магнитного потока согласуются всякий раз по правилу правоходового винта. Условимся положительные направления токов i_1 и i_2 в двух индуктивно связанных катушках считать **с о г л а с н ы м и**, если положительные направления создаваемых ими магнитных потоков самоиндукции и взаимной индукции совпадают.

На рис. 4.1, *а* и *б*, показаны индуктивно связанные катушки, насаженные на общий магнитопровод; здесь в зависимости от направления намотки витков выбраны такие положительные направления для токов i_1 и i_2 , при которых магнитные потоки самоиндукции и взаимной индукции в каждой катушке совпадают. Таким образом, рис. 4.1, *а* и *б*, иллюстрирует согласное направление токов.

При согласном направлении токов i_1 и i_2 в двух индуктивно связанных катушках выводы этих катушек, относительно которых токи i_1 и i_2 направлены одинаково, называются **одноименными** или **однополярными**.

На рис. 4.1. *а*, где витки обеих катушек намотаны в одном направлении, одноименными выводами являются выводы, отмеченные точками (два других вывода на рис. 4.1, *а* составляют вторую пару одноименных выводов).

Аналогичным образом на рис. 4.1, *б*, где витки катушек намотаны в противоположных направлениях, одноименные выводы также отмечены точками.

Таким образом, одноименные выводы индуктивно связанных катушек характерны тем, что при одинаковом направлении токов i_1 и i_2 относительно этих выводов магнитные потоки самоиндукции и взаимной индукции в каждой катушке складываются.

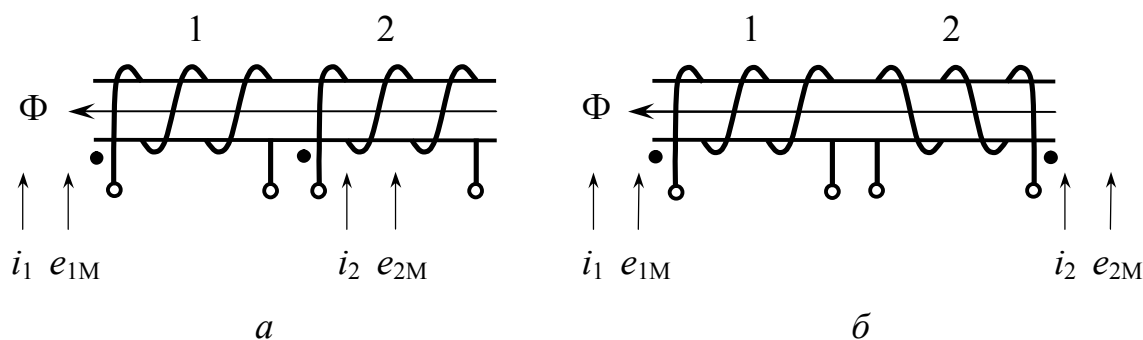


Рис. 4.1. Согласно направление токов
в индуктивно связанных катушках, намотанных:
a – в одном направлении; *б* – в противоположных направлениях

В связи с введением понятия об одноименных выводах при вычерчивании электрических схем нет необходимости показывать намотку витков индуктивно связанных катушек, а достаточно разметить на схеме их одноименные выводы. На рис. 4.2 показано схематическое изображение двух индуктивно связанных катушек с указанием одноименных выводов и выбранных положительных направлений токов i_1 и i_2 . Как это следует из сказанного выше, токи i_1 и i_2 направлены согласно на рис. 4.2, *a* и встречно на рис. 4.2, *б*.

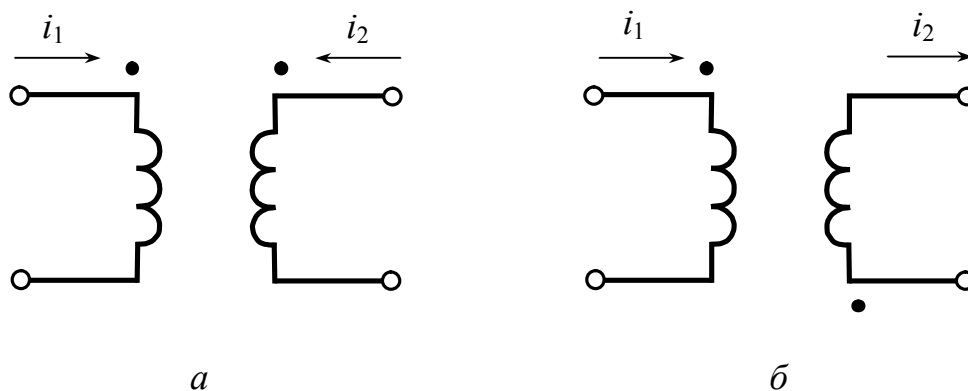


Рис. 4.2. Схематическое изображение индуктивно связанных катушек при направлениях токов: *a* – согласно; *б* – встречно

Ранее отмечалось, что положительное направление ЭДС самоиндукции выбирается совпадающим с положительным направлением тока, поэтому положительные направления магнитного потока и наводимой им ЭДС самоиндукции связаны

правилом правоходового винта. Точно так же и положительное направление ЭДС взаимной индукции e_{1M} , наводимой в катушке 1 током i_2 , принимается совпадающим с положительным направлением тока i_1 . Соответственно, положительное направление ЭДС взаимной индукции e_{2M} , наводимой в катушке 2 током i_1 , совпадает с положительным направлением i_2 . При таких условиях и согласном направлении токов i_1 и i_2 в формуле ЭДС взаимной индукции имеется знак «минус», так же как в формуле ЭДС самоиндукции, причем положительное направление магнитного потока и наводимой ЭДС взаимной индукции связано правилом правоходового винта:

$$\left. \begin{aligned} e_{1M} &= -\frac{w_1 d\Phi_{M_2}}{dt} = -M \frac{di_2}{dt}; \\ e_{2M} &= -\frac{w_2 d\Phi_{M_1}}{dt} = -M \frac{di_1}{dt}. \end{aligned} \right\} \quad (4.4)$$

Рассмотрим случай, когда через катушку 1 проходит ток i_1 , причем $di_1/dt > 0$. На основании (4.4) в катушке 2 наводится ЭДС взаимной индукции $e_{2M} = -M \frac{di_1}{dt} < 0$. В этом случае потенциал вывода катушки 2, одноименный с тем, в который входит ток i_1 , оказывается выше потенциала второго вывода катушки 2.

Отсюда можно заключить, что одноименные выводы двух индуктивно связанных катушек обладают той особенностью, что подведение к одной из них возрастающего тока вызывает повышение потенциала на одноименном выводе второй катушки.

На указанном свойстве основано экспериментальное нахождение одноименных выводов индуктивно связанных катушек. Одна из них включается в цепь источника постоянного напряжения, а к другой присоединяется вольтметр постоянного тока.

Если в момент замыкания цепи источника стрелка измерительного прибора отклоняется в сторону положительных показаний, то выводы индуктивно связанных катушек, подключенные к положительному полюсу источника электрической энергии и положительному выводу измерительного прибора, являются одноименными.

Теперь рассмотрим случай встречного направления токов i_1 и i_2 , схематически изображенный на рис. 4.2, б, где токи i_1 и i_2 направлены различно относительно одноименных выводов.

Ввиду того что положительные направления магнитных потоков самоиндукции и взаимной индукции в этом случае противоположны, ЭДС взаимной индукции при встречном направлении токов вычисляются по формулам, содержащим знак плюс:

$$\left. \begin{aligned} e_{1M} &= \frac{w_1 d \Phi_{M_2}}{dt} = M \frac{di_2}{dt}; \\ e_{2M} &= \frac{w_2 d \Phi_{M_1}}{dt} = M \frac{di_1}{dt}. \end{aligned} \right\} \quad (4.5)$$

Рассмотрим последовательное соединение двух индуктивно связанных катушек (рис. 4.3, а и б).

При согласном направлении токов (рис. 4.3, а) ЭДС взаимной индукции $e_{1M} = -M \frac{di_2}{dt}$ и $e_{2M} = -M \frac{di_1}{dt}$, совпадающие по направлению с токами, могут быть при обходе контура в том же направлении заменены падениями напряжения от взаимной индукции $u_{1M} = -e_{1M}$ и $u_{2M} = -e_{2M}$. Поэтому суммарное напряжение на обеих катушках с учетом того, что $i_1 = i_2 = i$, равно:

$$\begin{aligned} u_{\text{соз}} &= r_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} + r_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} = \\ &= (r_1 + r_2) i + (L_1 + L_2 + 2M) \frac{di}{dt}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Полученное выражение показывает, что две индуктивно связанные катушки, соединенные последовательно, при согласном направлении токов эквивалентны катушке, имеющей активное сопротивление $r_1 + r_2$, и индуктивность $L_1 + L_2 + 2M$.

Таким образом, как и следовало ожидать, наличие взаимной индукции при согласном направлении токов в катушках, соединенных последовательно, увеличивает индуктивность цепи.

При встречном направлении токов (рис. 4.3, б) падение напряжения от взаимной индукции при обходе контура в направлении тока получается со знаком минус:

$$\begin{aligned}
 u_{\text{вст}} &= r_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt} + r_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_1}{dt} = \\
 &= (r_1 + r_2) i + (L_1 + L_2 - 2M) \frac{di}{dt}.
 \end{aligned}
 \tag{4.7}$$

Данное выражение показывает, что две индуктивно связанные катушки, соединенные последовательно, при встречном направлении токов эквивалентны катушке, имеющей активное сопротивление $r_1 + r_2$ и индуктивность $L_1 + L_2 - 2M$.

Следовательно, наличие взаимной индукции при встречном направлении токов в катушках, соединенных последовательно, уменьшает индуктивность цепи.

На основании сказанного можно сделать следующий вывод: при согласном направлении токов падение напряжения от взаимной индукции имеет знак плюс, а при встречном — знак минус (обход цепи в обоих случаях совершается в положительном направлении тока).

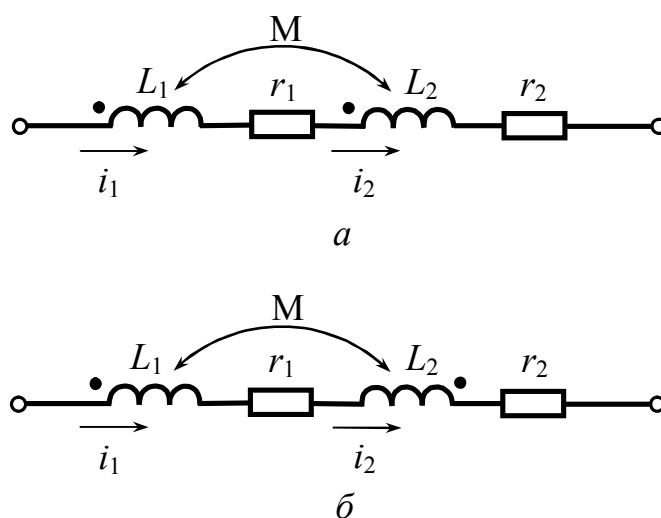


Рис. 4.3. Согласное (а) и встречное (б) направления токов в индуктивно связанных катушках, соединенных последовательно

4.3. Комплексная форма расчета цепи с взаимной индукцией

Представив ток в комплексной форме, получим выражение ЭДС взаимной индукции для случая согласного направления токов в комплексной форме:

$$-M \frac{d}{dt} \dot{I}_m e^{j\omega t} = -j\omega M \dot{I}_m e^{j\omega t},$$

откуда комплексная действующая ЭДС взаимной индукции

$$\dot{E}_M = -j\omega M \dot{I}$$

и соответственно, падение напряжения от взаимной индукции

$$\dot{U}_M = j\omega M \dot{I},$$

где $j\omega M$ – комплексное сопротивление взаимной индукции; в радиотехнике его называют сопротивлением связи.

Комплексные напряжения, соответствующие (4.6) и (4.7), запишутся так:

$$\dot{U}_{\text{соз}} = [r_1 + r_2 + j\omega(L_1 + L_2 + 2M)]\dot{I};$$

$$\dot{U}_{\text{вст}} = [r_1 + r_2 + j\omega(L_1 + L_2 - 2M)]\dot{I},$$

Отсюда, между прочим, вытекает следующий способ экспериментального нахождения взаимной индуктивности M : если через $x_{\text{соз}}$ обозначить индуктивное сопротивление цепи при согласном направлении токов последовательно соединенных элементов, а через $x_{\text{вст}}$ – то же при встречном направлении, то есть

$$\left. \begin{aligned} x_{\text{соз}} &= \omega(L_1 + L_2 + 2M); \\ x_{\text{вст}} &= \omega(L_1 + L_2 - 2M); \end{aligned} \right\} \quad (4.8)$$

то в результате вычитания второго равенства из первого получим:

$$M = \frac{x_{\text{соз}} + x_{\text{вст}}}{4\omega}.$$

4.4. Коэффициент индуктивной связи. Индуктивность рассеяния

Рассмотрим картину магнитного поля индуктивно связанных катушек, схематически представленную на рис. 4.4 (для согласного направления токов).

Положим, что первая катушка состоит из w_1 витков, а вторая из w_2 витков, расположенных в каждой катушке настолько

близко друг к другу, что магнитный поток охватывает целиком витки данной катушки.

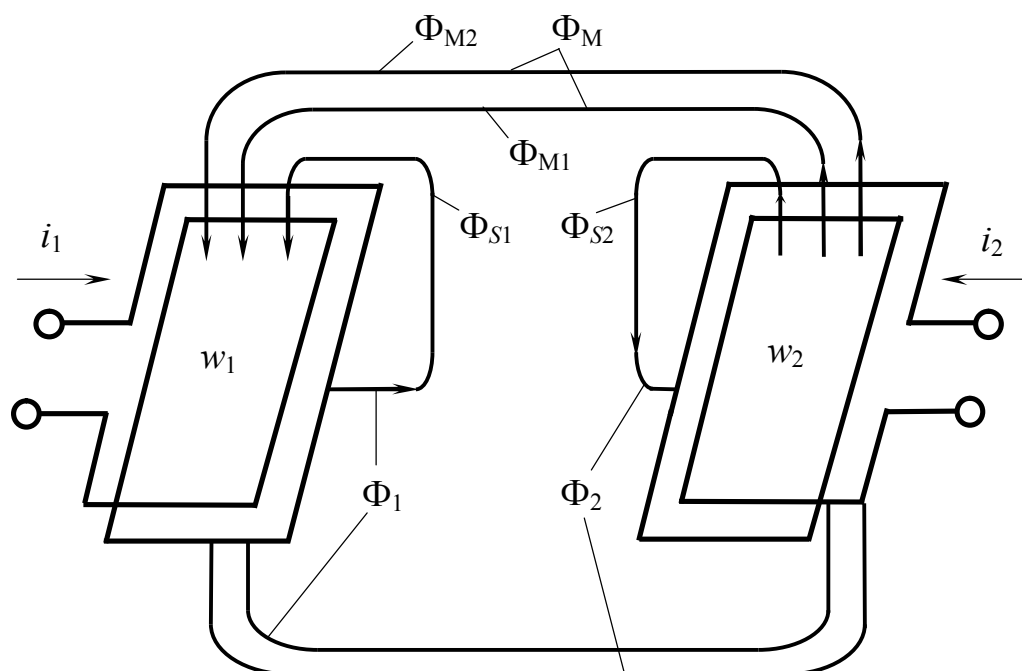


Рис. 4.4. Магнитные потоки двух индуктивно связанных катушек

В общем случае, когда по обеим катушкам проходят токи i_1 и i_2 , магнитные потоки могут быть представлены как результат наложения потоков, создаваемых каждым током в отдельности.

На рис. 4.4 приняты следующие обозначения магнитных потоков:

Φ_1 – весь поток, созданный током i_1 первой катушки;

Φ_{M_1} – поток взаимной индукции первой катушки, пронизывающий витки второй катушки;

Φ_{S_1} – поток рассеяния первой катушки, пронизывающий только витки этой катушки;

Φ_2 , Φ_{M_2} , Φ_{S_2} – аналогичные потоки, созданные током i_2 второй катушки;

Φ_M – общий поток взаимной индукции, пронизывающий витки обеих катушек.

Из сказанного следует, что

$$\Phi_1 = \Phi_{S_1} + \Phi_{M_1}, \quad \Phi_2 = \Phi_{S_2} + \Phi_{M_2}, \quad \Phi_M = \Phi_{M_1} + \Phi_{M_2}.$$

Чем меньше потоки рассеяния Φ_{S_1} и Φ_{S_2} , тем больше приближается Φ_{M_1} к Φ_1 и соответственно Φ_{M_2} к Φ_2 .

При изменении токов i_1 и i_2 во времени изменяются также и потоки, создаваемые этими токами. Индуктивность каждой катушки, как известно, определяется отношением потокосцепления самоиндукции к току данной катушки:

$$\left. \begin{aligned} L_1 &= \frac{w_1 \Phi_1}{i_1} = \frac{w_1 \Phi_{S_1}}{i_1} + \frac{w_1 \Phi_{M_1}}{i_1}; \\ L_2 &= \frac{w_2 \Phi_2}{i_2} = \frac{w_2 \Phi_{S_2}}{i_2} + \frac{w_2 \Phi_{M_2}}{i_2}. \end{aligned} \right\} \quad (4.9)$$

Первые слагаемые этих выражений

$$L_{S_1} = \frac{w_1 \Phi_{S_1}}{i_1}, L_{S_2} = \frac{w_2 \Phi_{S_2}}{i_2} \quad (4.10)$$

называются индуктивностями рассеяния катушек.

Магнитные потоки могут быть выражены через произведения МДС на магнитные проводимости путей, по которым замыкаются эти потоки:

$$\begin{aligned} \Phi_{S_1} &= i_1 w_1 \Lambda_{S_1}; & \Phi_{S_2} &= i_2 w_2 \Lambda_{S_2}; \\ \Phi_{M_1} &= i_1 w_1 \Lambda_M; & \Phi_{M_2} &= i_2 w_2 \Lambda_M. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} L_1 &= w_1^2 (\Lambda_{S_1} + \Lambda_M); \\ L_2 &= w_2^2 (\Lambda_{S_2} + \Lambda_M). \end{aligned} \quad (4.11)$$

Таким образом, индуктивность катушки пропорциональна квадрату числа витков и сумме магнитных проводимостей путей потоков рассеяния и взаимной индукции.

Магнитная проводимость в свою очередь зависит от формы и размеров катушек, их взаимного расположения и магнитной проницаемости среды. На основании (4.1), (4.2), (4.9) и (4.10) индуктивности рассеяния L_{S_1} и L_{S_2} можно выразить через

L_1 , L_2 и M следующими формулами, учитывающими число витков катушек:

$$L_{S_1} = L_1 - \frac{w_1}{w_2} M, \quad L_{S_2} = L_2 - \frac{w_2}{w_1} M. \quad (4.12)$$

Степень индуктивной связи двух катушек характеризуется коэффициентом связи k , определяемым как среднее геометрическое из отношений потока взаимной индукции ко всему потоку катушки, т. е.

$$k = \sqrt{\frac{\Phi_{M_1}}{\Phi_1} \frac{\Phi_{M_2}}{\Phi_2}}. \quad (4.13)$$

Если выразить потоки через параметры L_1 , L_2 и M по формулам (4.1), (4.2) и (4.9), то получим

$$k = \sqrt{\frac{Mi_1 w_1}{w_2 L_1 i_1} \frac{Mi_2 w_2}{w_1 L_2 i_2}}$$

или

$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}. \quad (4.14)$$

Из формулы (4.13) видно, что коэффициент связи всегда меньше единицы (так как $\Phi_{M_1} / \Phi_1 < 1$ и $\Phi_{M_2} / \Phi_2 < 1$). Коэффициент связи возрастает с уменьшением потоков рассеяния Φ_{S_1} и Φ_{S_2} .

С учетом (4.3) и (4.11) коэффициент связи может быть выражен через магнитные проводимости:

$$k = \frac{\Lambda_M}{\sqrt{(\Lambda_{S_1} + \Lambda_M)(\Lambda_{S_2} + \Lambda_M)}}.$$

Повышение коэффициента связи достигается бифилярным способом намотки катушек и применением магнитопровода, так как с увеличением магнитной проницаемости и соответственно магнитной проводимости магнитопровода доля потоков рассеяния снижается.

При перпендикулярном расположении осей катушки коэффициент связи обращается в нуль, поэтому, перемещая одну катушку относительно другой, можно плавно изменять коэффициент связи в широких пределах, а при последовательном соединении этих катушек плавно изменять их результирующую индуктивность. Такое устройство называется вариометром.

При наличии магнитопровода цепь теряет свойство линейности. Однако в тех случаях, когда по условиям работы магнитная индукция в магнитопроводе не выходит за пределы прямолинейного участка кривой намагничивания и его магнитная проницаемость может быть принята постоянной, данная цепь рассматривается как линейная и изложенная выше теория сохраняет силу.

В предыдущем параграфе было показано, что при встречном направлении токов в двух катушках, соединенных последовательно, результирующая индуктивность равна $L_1 + L_2 - 2M$.

Докажем теперь, что величина $L_1 + L_2 - 2M$ всегда положительна. Для этого воспользуемся двумя неравенствами:

$$(\sqrt{L_1} - \sqrt{L_2})^2 = L_1 + L_2 - 2\sqrt{L_1 L_2} \geq 0$$

и

$$\sqrt{L_1 L_2} > M.$$

Заменив в первом неравенстве $\sqrt{L_1 L_2}$ меньшей величиной M , получим:

$$L_1 + L_2 - 2M > 0.$$

4.5. Резонанс в электрических цепях

4.5.1. Резонансные (колебательные) цепи

Резонансными или колебательными цепями называются электрические цепи, в которых могут возникать явления резонанса напряжений или токов.

Резонанс представляет собой такой режим пассивной электрической цепи, содержащей индуктивности и емкости, при котором реактивное сопротивление и реактивная проводимость

цепи равны нулю; соответственно равна нулю реактивная мощность на выводах цепи.

Резонанс напряжения наблюдается в электрической цепи с последовательным соединением участков, содержащих индуктивности и емкости. Неразветвленная цепь, состоящая из последовательно соединенных элементов r , L и C , представляет собой один из простейших случаев такой цепи. В радиотехнике ее называют последовательным колебательным контуром.

При резонансе напряжений индуктивное сопротивление одной части цепи компенсируется емкостным сопротивлением другой ее части, последовательно соединенной с первой. В результате реактивное сопротивление и реактивная мощность на выводах цепи равны нулю.

В свою очередь резонанс токов наблюдается в электрической цепи с параллельным соединением участков, содержащих индуктивности и емкости. В радиотехнике такую цепь называют параллельным колебательным контуром.

При резонансе токов индуктивная проводимость одной части цепи компенсируется емкостной проводимостью другой ее части, параллельно соединенной с первой. В результате реактивная проводимость и реактивная мощность на выводах цепи равны нулю.

Частоты, при которых наблюдается явление резонанса, называются резонансными частотами.

Исследование резонансных режимов в электрических цепях заключается в нахождении резонансных частот, зависимостей различных величин от частоты или параметров L и C , а также в рассмотрении энергетических соотношений при резонансе.

Резонансные цепи очень широко применяются в электротехнике и представляют собой неотъемлемую часть всякого радиотехнического устройства.

4.5.2. Последовательный колебательный контур, резонанс напряжений

Резонансная цепь с последовательным соединением r , L и C (рис. 4.5) является простейшей цепью для изучения явления

резонанса напряжений и подробно рассматривается ниже. Комплексное сопротивление такой цепи зависит от частоты:

$$Z = r + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right). \quad (4.15)$$

Резонанс напряжений наступает при частоте ω_0 , когда

$$\omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C},$$

отсюда

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Мгновенные энергии выражаются следующими формулами:

$$W_L = \frac{Li^2}{2}; \quad W_C = \frac{Cu_C^2}{2}.$$

Если принять $i = I_m \sin \omega_0 t$, то $u_C = -U_{C_m} \cos \omega_0 t$, поэтому

$$W_L = \frac{LI_m^2}{2} \sin^2 \omega_0 t$$

и

$$W_C = \frac{CU_{C_m}^2}{2} \cos^2 \omega_0 t.$$

Максимальные значения этих энергий равны друг другу, так как

$$\frac{CU_{C_m}^2}{2} = \frac{C}{2} \left(\frac{I_m}{\omega_0 C} \right)^2 = \frac{LI_m^2}{2}.$$

Это следует и из того, что реактивное сопротивление цепи, содержащей индуктивность и емкость, при любой схеме соединений пропорционально разности максимальных значений энергии, запасаемой в магнитном и электрическом полях:

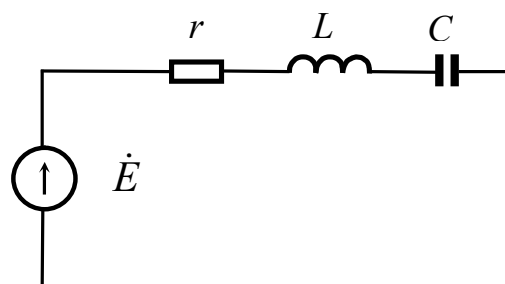


Рис. 4.5. Последовательный колебательный контур

$$x = \frac{\omega}{I^2} (W_{L_{\max}} - W_{C_{\max}}),$$

поэтому условию резонанса ($x = 0$) соответствует равенство

$$W_{L_{\max}} = W_{C_{\max}}.$$

Мгновенные значения W_L и W_C колеблются с удвоенной частотой около среднего значения $LI_m^2/4$, причем происходит непрерывное перераспределение энергии магнитного и электрического полей, суммарное значение которой постоянно:

$$W_L + W_C = \frac{LI_m^2}{2} [\sin^2 \omega_0 t + \cos^2 \omega_0 t] = \frac{LI_m^2}{2}.$$

В рассматриваемом случае (резонанс напряжений, рис. 4.5) в цепи не происходит обмена энергии между источником и реактивными элементами цепи, а вся электрическая энергия, поступающая от источника, расходуется в сопротивлении r .

Мы уже встречались с понятием добротности индуктивной катушки $Q_L = \omega L/r$ и конденсатора $Q_C = \omega Cr$. Умножив и разделив выражение для Q_L на $\frac{1}{2} I_m^2$, получим

$$Q_L = \omega \frac{\frac{1}{2} LI_m^2}{\frac{1}{2} r I_m^2} = 2\pi \frac{W_{L_{\max}}}{PT},$$

где $W_{L_{\max}}$ — максимум энергии, периодически запасаемой индуктивностью L ;

P — активная мощность, расходуемая в сопротивлении при амплитуде тока I_m .

Аналогично рассуждая, т. е. умножив и разделив выражение Q_C на $\frac{1}{2} U_m^2$, получим

$$Q_C = \omega \frac{\frac{1}{2} CU_m^2}{\frac{1}{2} \frac{U_m^2}{r}} = 2\pi \frac{W_{C_{\max}}}{PT},$$

где $W_{C_{\max}}$ – максимум энергии, запасаемой емкостью C ;

P – активная мощность потерь в параллельном сопротивлении r при амплитуде напряжения на емкости U_m .

Следовательно, в обоих случаях добротность определяется в зависимости от отношения максимума энергии реактивного элемента к энергии PT , выделяемой в виде тепла за период.

В случае резонансной цепи также пользуются понятием добротности цепи, подразумевая под этим в общем случае величину

$$Q = \omega_0 \frac{\sum W_{\max}}{P}, \quad (4.17)$$

где ω_0 – резонансная частота;

$\sum W_{\max}$ – сумма максимальных значений энергии, периодически запасаемой при резонансе в индуктивных (или емкостных) элементах;

P – активная мощность на выводах цепи при резонансе.

Знак \sum в (4.17) относится к случаю, когда число индуктивных (или емкостных) элементов превышает единицу. В рассматриваемом нами случае резонанса напряжений в цепи (рис. 4.7) знак \sum опускается.

Для схемы рис. 4.5 на основании (4.17) получаем

$$Q = \frac{\omega_0 L}{r} = \frac{1}{\omega_0 C r} = \frac{\sqrt{\frac{L}{C}}}{r} = \frac{\rho}{r}, \quad (4.18)$$

где

$$\rho = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

называется характеристическим (а также волновым) сопротивлением резонансного контура.

4.5.3. Параллельный колебательный контур. Резонанс токов

Явление резонанса токов удобно изучать применительно к электрической цепи с параллельно соединенными r , L и C (рис. 4.6), так как при этом можно непосредственно воспользоваться результатами, полученными ранее.

Действительно, выражение для комплексной проводимости такой цепи

$$Y = g - j\left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right) \quad (4.19)$$

по своей структуре аналогично выражению (4.15), причем резонансная частота определяется согласно (4.16).

Добротность резонансной цепи на основании (4.17) следующая:

$$Q = \omega_0 \frac{CU_m^2}{2\frac{U^2}{r}} = \omega_0 Cr = \frac{r}{\rho}.$$

По аналогии с предыдущим выражение (4.19) приводится к виду

$$Y = g\left(1 + jQ\delta\frac{\delta+2}{\delta+1}\right),$$

где δ – относительная расстройка частоты [1]

$$\delta = \frac{\omega}{\omega_0} - 1.$$

При заданном напряжении \dot{U} на выводах цепи ток, идущий от источника в цепь, следующий

$$\dot{I} = Y\dot{U} = g\dot{U}\left(1 + jQ\delta\frac{\delta+2}{\delta+1}\right).$$

Этот ток достигает минимума при резонансной частоте, так как при этом

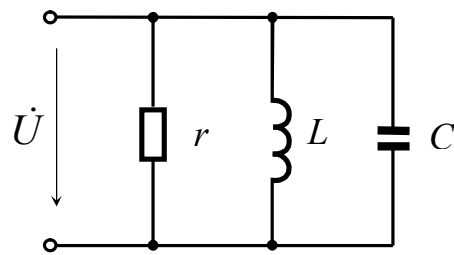


Рис. 4.6. Параллельный колебательный контур

$$\dot{I}_0 = g\dot{U}.$$

Следовательно, отношение токов I_0 и I определяется из выражения

$$\frac{I_0}{I} = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2 \delta^2 \left(\frac{\delta + 2}{\delta + 1} \right)^2}}.$$

В случае резонанса токов токи в индуктивном и емкостном элементах схемы рис. 4.6 равны и противоположны по знаку

$$\dot{I}_{C_0} = -\dot{I}_{L_0} = j\omega_0 C\dot{U} = j\dot{I}_0 Q.$$

Полученное выражение показывает, что добротность рассматриваемой цепи определяется как кратность токов в L и C по отношению к суммарному току I_0 .

При $Q > 1$ эти токи превышают I_0 .

Если параллельный колебательный контур питается от источника тока с внутренним сопротивлением R_i , то чем меньше сопротивление R_i , присоединяемое параллельно сопротивлению r , тем ниже добротность и шире полоса пропускания контура. В связи с этим в отличие от последовательного колебательного контура с точки зрения сокращения полосы пропускания параллельного колебательного контура выгоден источник тока с большим внутренним сопротивлением.

Глава 5

МЕТОДЫ РАСЧЕТА СЛОЖНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

5.1. Преобразование схем электрических цепей

При расчете электрических цепей часто возникает целесообразность преобразования схем этих цепей в более простые и удобные для расчета. Так, при одном или нескольких источниках электрической энергии в ряде случаев удастся преобразовать электрическую схему в одноконтурную или в схему с двумя узлами, что весьма упрощает последующий расчет.

Описываемые ниже приемы преобразования схем электрических цепей применимы для цепей постоянного и переменного тока; ради общности изложения они приводятся в комплексной записи.

Одним из основных видов преобразования электрических схем, часто применяемых на практике, является преобразование схемы со смешанным соединением элементов. Смешанное соединение элементов представляет собой сочетание более простых соединений – последовательного и параллельного.

5.1.1. Последовательное соединение

На рис. 5.1 изображена ветвь электрической цепи, в которую последовательно включены комплексные сопротивления Z_1, Z_2, \dots, Z_n . Через все участки цепи, соединенные последовательно, проходит один и тот же ток I .

Напряжения на отдельных участках цепи обозначены через $\dot{U}_1, \dot{U}_2, \dots, \dot{U}_n$. По второму закону Кирхгофа,

$$\dot{U} = \dot{U}_1 + \dot{U}_2 + \dots + \dot{U}_n,$$

или, что то же самое,

$$\dot{U} = Z_1 \dot{I} + Z_2 \dot{I} + \dots + Z_n \dot{I} = \dot{I}(Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n).$$

Сумма комплексных сопротивлений всех последовательно соединенных участков цепи

$$Z = \sum_{k=1}^n Z_k$$

называется эквивалентным комплексным сопротивлением.

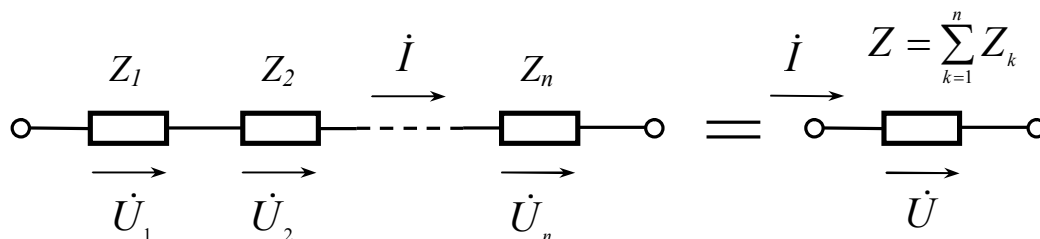


Рис. 5.1. Последовательное соединение

Если мнимые части сопротивлений

$$Z_k = r_k + jx_k$$

представляют собой сопротивления одинакового характера – индуктивного или емкостного, то эквивалентное комплексное сопротивление Z находится в результате арифметического сложения в отдельности сопротивлений r_k , индуктивностей L_k или величин $1/C_k$, обратных емкостям:

$$Z = r + j\omega L$$

или

$$Z = r - j \frac{1}{\omega C},$$

где

$$r = \sum_{k=1}^n r_k ; \quad L = \sum_{k=1}^n L_k ; \quad \frac{1}{C} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{C_k}.$$

Ток в цепи равен

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{Z}.$$

Напряжения на участках цепи, соединенных последовательно, относятся как комплексные сопротивления этих участков: напряжение на k -м участке равно произведению суммарного напряжения \dot{U} на отношение комплексного сопротивления k -го участка к эквивалентному комплексному сопротивлению цепи:

$$\dot{U}_k = \dot{U} \frac{Z_k}{Z}.$$

Приведенные выше формулы справедливы при любых значениях Z_k .

5.1.2. Параллельное соединение

На рис. 5.3 изображена схема электрической цепи с двумя узлами. Между этими узлами параллельно соединены ветви с комплексными проводимостями Y_1, Y_2, \dots, Y_n . Напряжение на всех ветвях одинаковое, равное \dot{U} .

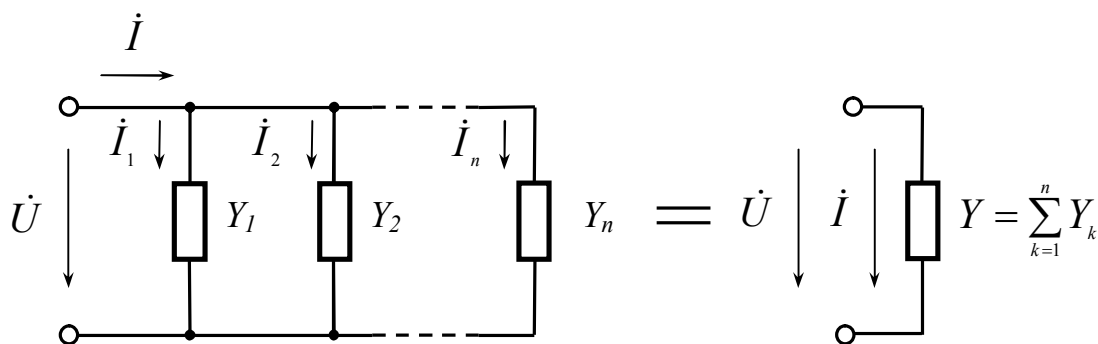


Рис. 5.3. Параллельное соединение

Токи в ветвях обозначены через $\dot{I}_1, \dot{I}_2, \dots, \dot{I}_n$. По первому закону Кирхгофа,

$$\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \dots + \dot{I}_n,$$

или, что то же,

$$\dot{I} = Y_1 \dot{U} + Y_2 \dot{U} + \dots + Y_n \dot{U}.$$

Сумма комплексных проводимостей всех ветвей, соединенных параллельно,

$$Y = \sum_{k=1}^n Y_k,$$

называется эквивалентной комплексной проводимостью.

Если мнимые части комплексов $Y_k = g_k - jb_k$ представляют собой проводимости одинакового характера – емкостного или индуктивного, то эквивалентная комплексная проводимость Y находится в результате арифметического сложения отдельных активных проводимостей g_k , емкостей C_k или величин $1/L_k$, обратных индуктивностям :

$$Y = g + j\omega C$$

или

$$Y = g - j \frac{1}{\omega L},$$

где

$$g = \sum_{k=1}^n g_k; \quad C = \sum_{k=1}^n C_k; \quad \frac{1}{L} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{L_k}.$$

Суммарный ток в цепи равен

$$\dot{I} = Y \dot{U}.$$

Токи в ветвях соотносятся, как их комплексные проводимости: ток в k -й ветви равен произведению суммарного тока всех ветвей на отношение комплексной проводимости k -й ветви к эквивалентной комплексной проводимости:

$$\dot{I}_k = \dot{I} \frac{Y_k}{Y} = \dot{I} \frac{Z}{Z_k}.$$

Данным выражением особенно удобно пользоваться при количестве ветвей $n > 2$. При этом значения Y_k могут быть любыми.

В случае параллельного соединения двух ветвей ($n = 2$) обычно пользуются выражениями, в которые входят сопротивления $Z_1 = 1/Y_1$ и $Z_2 = 1/Y_2$ ветвей; эквивалентное сопротивление

$$Z = \frac{1}{Y_1 + Y_2} = \frac{1}{\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}} = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2}.$$

Токи в параллельных ветвях:

$$\dot{I}_1 = \dot{I} \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2}, \quad \dot{I}_2 = \dot{I} \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2},$$

т. е. ток одной из двух параллельных ветвей равен суммарному току, умноженному на сопротивление другой ветви и деленному на сумму сопротивлений обеих ветвей.

5.2. Применение законов Кирхгофа для расчета сложных цепей

В предыдущих главах рассматривались простейшие схемы электрических цепей – одноконтурные схемы, цепная схема с одним источником электрической энергии и схемы с двумя узлами. Были описаны методы преобразования схем, с помощью которых в ряде случаев удастся упростить расчет разветвленной электрической цепи. При этом под расчетом цепи подразумевается вычисление значений электрических величин или их отношений при заданных схеме и параметрах цепи.

Описываемые ниже методы и теоремы применимы для цепей постоянного и переменного тока; ради общности изложения они приводятся в комплексной форме.

В общем случае искомые значения электрических величин и их соотношения могут быть найдены в результате совместного решения системы уравнений, выражающих первый и второй законы Кирхгофа для заданной электрической цепи.

Положим, что в схеме, содержащей P ветвей и q узлов, заданными являются источники ЭДС, а искомыми – токи в ветвях. Следовательно, число неизвестных равно числу ветвей.

По первому закону Кирхгофа, выражающему равенство нулю алгебраической суммы токов в узле, можно записать $(q - 1)$ независимых уравнений; уравнение для последнего, q -го, узла является следствием предыдущих $(q - 1)$ уравнений. Действительно, ввиду того, что каждая ветвь связывает два узла, ток каждой ветви входит дважды с различными знаками в уравнения,

записанные для q узлов, поэтому если просуммировать q уравнений, то получится тождество вида $0 = 0$. Следовательно, одно из этих уравнений является зависимым, т. е. вытекающим из всех остальных уравнений.

Узлы, для которых записываются независимые уравнения по первому закону Кирхгофа, можно назвать независимыми узлами. Из сказанного следует, что из общего числа q узлов любые $(q - 1)$ узлов являются независимыми, а оставшийся последний узел является зависимым.

По второму закону Кирхгофа, выражающему равенство алгебраической суммы ЭДС в контуре алгебраической сумме падений напряжения в нем, может быть записано $(p - q + 1)$ независимых уравнений, где p – число ветвей. В самом деле, если ко всем ветвям применить закон Ома, то получится p уравнений вида

$$\dot{U}_{ik} = \dot{U}_i - \dot{U}_k = -\dot{E}_n + Z_n \dot{I}_n, \quad (5.1)$$

где \dot{U}_{ik} – комплексное напряжение между узлами i и k ;

\dot{E}_n, \dot{I}_n – комплексные ЭДС источника и ток в n -й ветви, направленные от узла 1 к узлу k ;

Z_n – комплексное сопротивление той же ветви.

В систему уравнений вида (5.1) входят p неизвестных токов \dot{I}_n и $(q - 1)$ неизвестных потенциалов \dot{U}_i, \dot{U}_k и т. д. (потенциал одного из узлов принимается равным нулю). Если из имеющейся системы уравнений исключить эти неизвестные токи и потенциалы, останется $(p - q + 1)$ уравнений, связывающих комплексные ЭДС источников с напряжениями на комплексных сопротивлениях; полученные таким путем уравнения выражают второй закон Кирхгофа.

Итак, расчет электрической цепи с помощью первого и второго законов Кирхгофа сводится к решению $(q - 1) + (p - q + 1) = p$ уравнений – по числу ветвей.

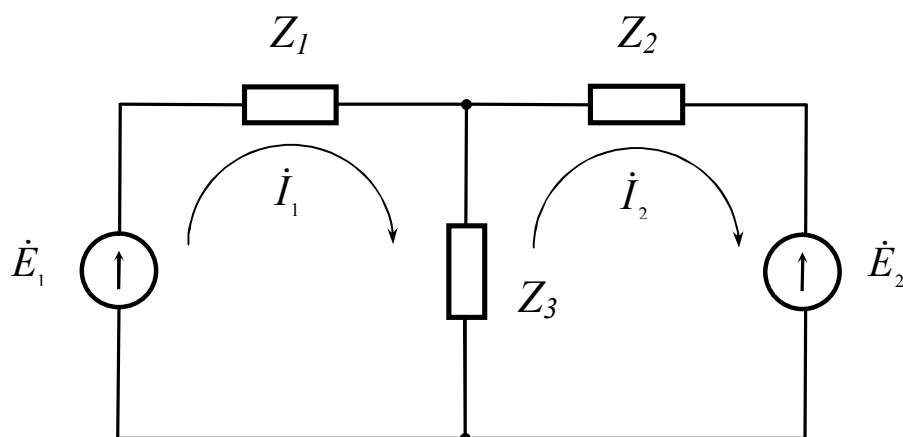
Контур, для которых уравнения, записанные по второму закону Кирхгофа, являются независимыми, называются независимыми контурами. Независимые контуры отличаются друг от друга хотя бы одной новой ветвью.

5.3. Метод контурных токов

Метод контурных токов является одним из основных методов расчета сложных электрических цепей, которым широко пользуются на практике. Этот метод заключается в том, что вместо токов в ветвях определяются на основании второго закона Кирхгофа так называемые контурные токи, замыкающиеся в контурах.

На рис. 5.5 в виде примера показана двухконтурная электрическая цепь, в которой \dot{I}_1 и \dot{I}_2 – контурные токи. Токи в сопротивлениях Z_1 и Z_2 равны соответствующим контурным токам; ток в сопротивлении Z_3 , являющемся общим для обоих контуров, равен разности контурных токов \dot{I}_1 и \dot{I}_2 , так как эти токи направлены в ветви Z_3 встречно. При этом если положительное направление искомого тока в ветви Z_3 принять совпадающим с направлением контурного тока \dot{I}_1 , то тогда ток в ветви Z_3 будет равен $\dot{I}_1 - \dot{I}_2$. В противном случае он будет равен $\dot{I}_2 - \dot{I}_1$.

Рис. 5.5. Иллюстрация к методу контурных токов



Число уравнений, записываемых для контурных токов по второму закону Кирхгофа, равно числу независимых контуров, т. е. для электрической схемы с числом узлов q и числом ветвей p задача нахождения контурных токов сведется к решению систе-

мы $(p - q + 1)$ уравнений. Так, в схеме рис. 5.5 $q = 2, p = 3$, следовательно, число уравнений равно $3 - 2 + 1 = 2$ (число независимых контуров).

Условимся сумму комплексных сопротивлений, входящих в контур, называть собственным сопротивлением контура, а комплексное сопротивление, принадлежащее одновременно двум или нескольким контурам, – общим сопротивлением этих контуров.

Положительные направления контурных токов задаются произвольно. Направление обхода каждого контура принимается обычно совпадающим с выбранным положительным направлением контурного тока, поэтому при составлении уравнения по второму закону Кирхгофа падение напряжения от данного контурного тока в собственном сопротивлении контура берется со знаком плюс. Падение напряжения от тока смежного контура в общем сопротивлении берется со знаком минус, если контурные токи в этом сопротивлении направлены встречно, как это, например, имеет место в схеме рис. 5.5, где направление обоих контурных токов выбрано по ходу часовой стрелки.

Для заданной электрической схемы с двумя независимыми контурами (рис. 5.5) могут быть записаны два уравнения по второму закону Кирхгофа, а именно:

$$\dot{E}_1 = (Z_1 + Z_3) \dot{I}_1 - Z_3 \dot{I}_2; \quad -\dot{E}_2 = -Z_3 \dot{I}_1 + (Z_2 + Z_3) \dot{I}_2,$$

где $(Z_1 + Z_3)$ – собственное сопротивление контура 1;

$(Z_2 + Z_3)$ – собственное сопротивление контура 2;

Z_3 – общее сопротивление контуров 1 и 2

(знак минус в уравнениях обусловлен выбором положительных направлений контурных токов).

Если заданная электрическая схема содержит n независимых контуров, то на основании второго закона Кирхгофа получается система из n уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{E}_1 = Z_{(11)} \dot{I}_1 + Z_{(12)} \dot{I}_2 + \dots + Z_{(1n)} \dot{I}_n; \\ \dot{E}_2 = Z_{(21)} \dot{I}_1 + Z_{(22)} \dot{I}_2 + \dots + Z_{(2n)} \dot{I}_n; \\ \dot{E}_n = Z_{(n1)} \dot{I}_1 + Z_{(n2)} \dot{I}_2 + \dots + Z_{(nn)} \dot{I}_n. \end{array} \right. \quad (5.2)$$

Здесь \dot{E}_i – контурная ЭДС в контуре i ($i = 1, 2, \dots, n$), т. е. алгебраическая сумма ЭДС, действующих в данном контуре; ЭДС, совпадающие по направлению с направлением обхода, берутся со знаком плюс, а направленные встречно – со знаком минус;

$Z_{(ii)}$ – собственное сопротивление контура i ;

$Z_{(ik)}$ – общее сопротивление контуров i и k .

Уравнения (5.2), выражающие второй закон Кирхгофа, записаны в предположении, что источниками электрической энергии служат источники ЭДС. При наличии в электрической схеме источников тока они могут быть заменены эквивалентными источниками ЭДС.

Если проводимости источников тока равны нулю, то целесообразно выбрать заданные токи в качестве контурных, тогда число неизвестных контурных токов и соответственно число уравнений сократится на число заданных токов.

Если в заданной электрической схеме имеются параллельные ветви, то замена их эквивалентным комплексным сопротивлением сокращает число контуров (за счет тех, которые образованы параллельными ветвями).

Решая систему уравнений (5.2), находят контурные токи, по которым находят токи в ветвях.

5.4. Метод узловых напряжений

Метод узловых напряжений заключается в том, что на основании первого закона Кирхгофа определяются потенциалы в узлах электрической цепи относительно некоторого базисного узла. Эти разности потенциалов называются узловыми напряжениями, причем положительное направление их указывается стрелкой от рассматриваемого узла к базисному.

Напряжение на какой-либо ветви равно, очевидно, разности узловых напряжений концов данной ветви. Таким образом, зная узловые напряжения в электрической цепи, можно найти токи в ветвях.

Если принять потенциал базисного узла равным нулю, то напряжения между остальными узлами и базисным узлом будут равны также потенциалам этих узлов, поэтому данный метод называется также методом узловых потенциалов.

На рис. 5.6 в виде примера изображена электрическая схема с двумя источниками тока, имеющая три узла: 1, 2 и 3. Выберем в данной схеме в качестве базиса узел 3 и обозначим напряжения точек 1 и 2 через \dot{U}_1 и \dot{U}_2 . Согласно принятым на рис. 5.6 обозначениям комплексные проводимости ветвей равны соответственно:

$$Y_1 = \frac{1}{Z_1}; \quad Y_2 = \frac{1}{Z_2}; \quad Y_3 = \frac{1}{Z_3}.$$

Для заданной электрической цепи с тремя узлами могут быть записаны два уравнения по первому закону Кирхгофа, а именно:

для узла 1

$$\dot{I}_1 = Y_1 \dot{U}_1 + Y_3 (\dot{U}_1 - \dot{U}_2) = (Y_1 + Y_3) \dot{U}_1 - Y_3 \dot{U}_2;$$

для узла 2

$$\dot{I}_2 = Y_2 \dot{U}_2 + Y_3 (\dot{U}_2 - \dot{U}_1) = -Y_3 \dot{U}_1 + (Y_2 + Y_3) \dot{U}_2.$$

Величина $Y_1 + Y_3$, представляющая собой сумму комплексных проводимостей ветвей, сходящихся в узле 1, называется собственной проводимостью узла 1. Величина Y_3 , равная комплексной проводимости ветви между узлами 1 и 2, входящая в уравнения со знаком минус, называется общей проводимостью между узлами 1 и 2.

Если заданы токи источников тока и комплексные проводимости ветвей, то узловые напряжения находятся совместным решением уравнений.

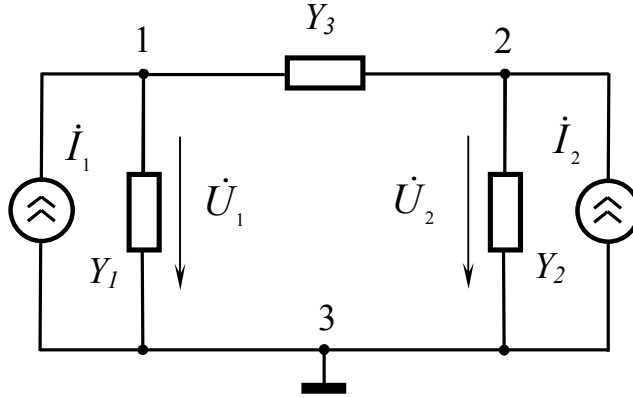


Рис. 5.6. Иллюстрация к методу узловых напряжений

В общем случае если электрическая схема содержит q узлов, то на основании первого закона Кирхгофа получается система из $(q - 1)$ уравнений (один узел принят за базисный):

$$\left. \begin{aligned} \dot{I}_1 &= Y_{(11)} \dot{U}_1 + Y_{(12)} \dot{U}_2 + \dots + Y_{(1,q-1)} \dot{U}_{q-1}; \\ \dot{I}_2 &= Y_{(21)} \dot{U}_1 + Y_{(22)} \dot{U}_2 + \dots + Y_{(2,q-1)} \dot{U}_{q-1}; \\ &\dots\dots\dots \\ \dot{I}_{q-1} &= Y_{(q-1,1)} \dot{U}_1 + Y_{(q-1,2)} \dot{U}_2 + \dots + Y_{(q-1,q-1)} \dot{U}_{q-1}. \end{aligned} \right\} \quad (5.3)$$

Здесь ток источника тока, подходящий к узлу, берется со знаком плюс, а отходящий от узла – со знаком минус; $Y_{(ii)}$ – собственная проводимость всех ветвей, сходящаяся в данном узле i ; $Y_{(ik)}$ – общая проводимость между узлами i и k , входящая со знаком минус при выбранном направлении всех узловых напряжений к базису.

Уравнения (5.3), выражающие первый закон Кирхгофа, записаны в предположении, что в качестве источников электрической энергии служат источники тока. При наличии в электрической схеме источников ЭДС последние должны быть заменены эквивалентными источниками тока.

Если в схеме имеются ветви, содержащие только ЭДС (проводимости таких ветвей бесконечно велики), то эти ветви следует рассматривать как источники неизвестных токов, которые затем исключаются при сложении соответствующих уравнений. Дополнительными связями между неизвестными узловыми

напряжениями будут являться известные напряжения между узлами, равные заданным ЭДС.

При наличии только одной ветви с ЭДС и бесконечной проводимостью целесообразно принять за базисный узел один из узлов, к которому примыкает данная ветвь, тогда напряжение другого узла становится известным и число неизвестных сокращается на одно.

Метод узловых напряжений имеет преимущество перед методом контурных токов в том случае, когда число уравнений, записанных по первому закону Кирхгофа, меньше числа уравнений, записанных по второму закону Кирхгофа.

5.5. Метод наложения

В линейной электрической цепи, содержащей источники ЭДС, контурные токи (и соответственно токи в ветвях) представляют собой линейные функции контурных ЭДС. Математически они выражаются формулой

$$\dot{I}_k = \frac{1}{\Delta_z} \sum_{i=1}^n E_i \dot{\Delta}_{ik},$$

где Δ_z – определитель сопротивлений из (5.2);

Δ_{ik} – алгебраическое дополнение определителя Δ_z .

Физический смысл этой формулы заключается в том, что ток в любом контуре линейной электрической цепи может быть получен как алгебраическая сумма токов, вызываемых в этом контуре каждой из ЭДС в отдельности.

Метод расчета токов, основанный на определении токов в одном и том же контуре (или ветви) при поочередном воздействии ЭДС и последующем алгебраическом сложении этих токов, называется методом наложения.

При определении частичных слагающих токов по методу наложения необходимо считать включенными внутренние сопротивления тех источников ЭДС, которые принимаются отсутствующими при вычислении слагающих токов. Если в цепи заданы идеальные источники ЭДС, т. е. внутренние сопротивления

источников равны нулю, то при определении токов, вызываемых какой-либо ЭДС, все остальные источники ЭДС закорачиваются.

В свою очередь в линейной электрической цепи, содержащей источники тока, узловые напряжения (и соответственно напряжения на ветвях) представляют собой линейные функции задающих токов источников. Математически они выражаются формулой

$$\dot{U}_k = \frac{1}{\Delta_y} \sum_{i=1}^{q-1} \dot{I}_i \Delta_{ik},$$

где Δ_y – определитель проводимостей из (5.3);

Δ_{ik} – алгебраическое дополнение определителя Δ_y .

Физический смысл этой формулы заключается в том, что узловое напряжение для любого узла линейной электрической цепи может быть получено как алгебраическая сумма напряжений, вызываемых в этом узле каждым из задающих токов в отдельности.

При определении частичных слагающих узловых напряжений по методу наложения необходимо считать включенными внутренние проводимости тех источников тока, которые принимаются отсутствующими при вычислении слагающих напряжений. Если источники тока заданы без внутренних проводимостей, т.е. проводимости их равны нулю, то при пользовании методом наложения ветви с неучтенными источниками тока разрываются.

Если в линейной электрической цепи заданными являются одновременно источники ЭДС и источники тока, то метод наложения применим и в этом случае. Например, ток в каком-либо контуре данной цепи может быть получен в результате алгебраического сложения токов, вызываемых в этом контуре поочередным действием источников ЭДС и тока. При этом отсутствующие источники ЭДС заменяются внутренними сопротивлениями, а отсутствующие источники тока – внутренними проводимостями.

Глава 6

ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКИ

6.1. Основные определения и классификация четырехполюсников

Часть электрической цепи, рассматриваемая по отношению к любым двум парам ее выводов, называется четырехполюсником (рис. 6.1). Понятием «четырехполюсник» пользуются тогда, когда интересуются токами и напряжениями только в двух ветвях или двух парах узлов электрической цепи. Так, в качестве четырехполюсника могут быть представлены длинная линия, электрический фильтр, трансформатор, усилитель, корректирующее и всякое другое устройство с двумя парами выводов, включенное между источником и приемником электрической энергии, когда предметом исследования являются токи и напряжения на этих выводах, а не токи и напряжения внутри самого четырехполюсника.

Выводы четырехполюсника, к которым присоединяется источник электрической энергии, называются входными, а выводы, к которым присоединяется нагрузка, — выходными. Ради краткости применяются также термины «вход» и «выход» четырехполюсника.



Рис. 6.1. Четырехполюсник

На практике возможны случаи, когда обе пары выводов четырехполюсника являются входными (случай двустороннего питания четырехполюсника) или выходными (случай четырехполюсника, содержащего независимые источники электрической энергии и нагруженного с обеих сторон).

Четырехполюсники могут быть классифицированы по различным признакам.

По признаку линейности элементов, входящих в них, четырехполюсники разделяются на линейные и нелинейные. Ниже рассматриваются линейные четырехполюсники.

По схеме внутренних соединений четырехполюсников различают Г-образный (рис. 6.2, *а*), Т-образный (рис. 6.2, *б*), П-образный (рис. 6.2, *в*), мостовой (рис. 6.2, *г*), Т-образно-мостовой (рис. 6.2, *д*) и др.

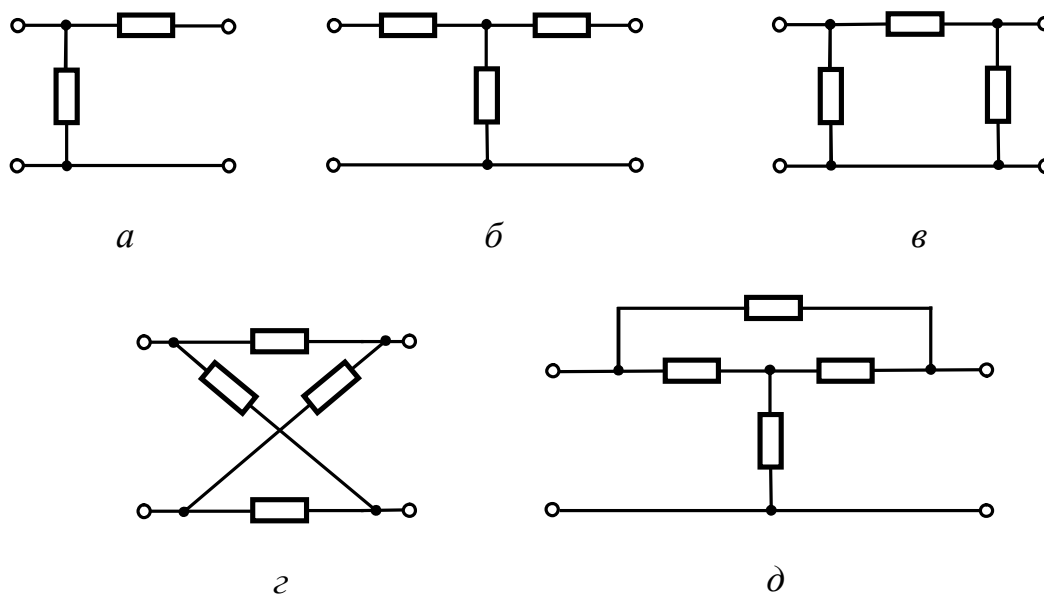


Рис. 6.2. Разновидности четырехполюсников:
а – Г-образный; *б* – Т-образный; *в* – П-образный; *г* – мостовой;
д – Т-образно-мостовой

Четырехполюсники делятся на активные и пассивные. Четырехполюсник называется активным, если он содержит внутри источники электрической энергии. При этом если эти источники являются независимыми, то в случае линейного четырехполюсника обязательным дополнительным условием активности четырехполюсника является наличие на одной или обеих парах его разомкнутых выводов напряжения, обусловленного источниками электрической энергии, находящимися внутри него, т. е. необходимо, чтобы действия этих источников не компенсировались взаимно внутри четырехполюсника. Такой активный четырехполюсник называется автономным.

В случае, когда источники внутри четырехполюсника являются зависимыми, как это, например, имеет место в схемах замещения электронных ламп и транзисторов, то после отсоединения четырехполюсника от остальной части цепи напряжение на

разомкнутых выводах его не обнаруживается. Такой активный четырехполюсник называется неавтономным.

Четырехполюсник называется пассивным, если он не содержит источников электрической энергии. Линейный четырехполюсник может содержать источники электрической энергии, взаимно компенсирующие таким образом, что напряжения на обеих парах разомкнутых выводов четырехполюсника равны нулю. Так, четырехполюсник на рис. 6.2, *а* пассивен, так как любые две ЭДС четырехполюсника взаимно компенсируются в контуре (в уравнениях Кирхгофа эти ЭДС взаимно уничтожаются). Четырехполюсник, изображенный на рис. 6.2, *б*, пассивен вследствие того, что напряжение на выводах ветви с источниками всегда равно нулю.

Различают четырехполюсники симметричные и несимметричные. Четырехполюсник является симметричным в том случае, когда перемена местами его входных и выходных выводов не изменяет токов и напряжений в цепи, с которой он соединен. В противном случае четырехполюсник является несимметричным.

Четырехполюсник называется обратимым, если выполняется теорема обратимости, т. е. отношение напряжения на входе к току, на выходе, или, что тоже, передаточное сопротивление входного и выходного контуров не зависит от того, какая из двух пар выводов является входной и какая выходной. В противном случае четырехполюсник называется необратимым.

Пассивные линейные четырехполюсники являются обратимыми, несимметричные же активные (автономные и неавтономные) четырехполюсники необратимы. Симметричные четырехполюсники всегда обратимы.

Основной смысл теории четырехполюсника заключается в том, что, пользуясь некоторыми обобщенными параметрами четырехполюсника, можно находить токи и напряжения на входе и выходе четырехполюсника.

Сложная электрическая цепь (например, канал связи), имеющая входные и выходные выводы, может рассматриваться как совокупность составных четырехполюсников, соединенных по определенной схеме.

Теория четырехполюсника позволяет вычислить параметры такого сложного четырехполюсника по параметрам составных

четырехполосников и, таким образом, получить аналитическую зависимость между токами и напряжениями на входе и выходе результирующего сложного четырехполосника, не производя расчетов токов и напряжений внутри заданной схемы.

Получаемые таким путем значения величин на входе и выходе позволяют оценить режим работы передачи в целом. При этом пользование обобщенными параметрами четырехполосника дает возможность сопоставлять и правильно оценивать передающие свойства электрических цепей, различных по своему типу и структуре.

Теория четырехполосника позволяет также решать задачи синтеза, т. е. находить структуру и элементы четырехполосника по заданным характеристикам.

6.2. Системы уравнений четырехполосника

Положим, что имеется четырехполосник, не содержащий независимых источников электрической энергии. Обозначим левую пару выводов четырехполосника цифрами 1–1', а правую пару выводов – цифрами 2–2'. Этому условного обозначения будем придерживаться во всем последующем изложении, приписывая индексы 1 и 2 токам и напряжениям, относящимся соответственно к левой и правой парам выводов четырехполосника. Те-

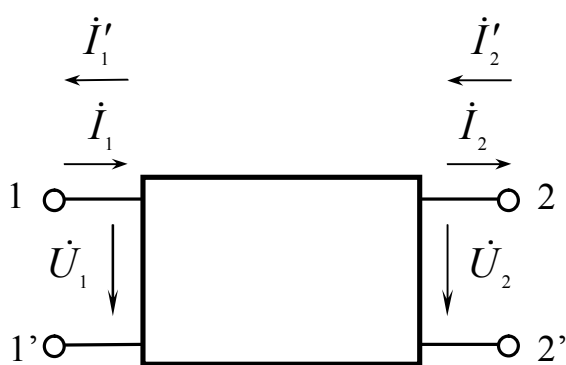


Рис. 6.3. Положительные направления токов и напряжений четырехполосника

ми же индексами 1 и 2 будут обозначаться входной и выходной контуры четырехполосника.

На рис. 6.3 обозначены принятые положительные направления для токов и напряжений на выводах четырехполосника. Вариант с токами I_1 и I_2 принято называть прямой передачей (см. уравнения по форме $\parallel A \parallel$), вариант с токами I_1' и I_2' –

обратной передачей (см. уравнения по форме $\parallel B \parallel$). Используется также вариант с токами I_1 и I_2' который будем называть треть-

им вариантом (см. уравнения по формам $\| Y \|$, $\| Z \|$, $\| H \|$, $\| G \|$).

Во всех случаях каждое из напряжений \dot{U}_1 и \dot{U}_2 понимается как разность потенциалов верхнего (1 или 2) и нижнего (1' или 2') выводов четырехполюсника.

Напряжения и токи на выводах четырехполюсника обуславливаются присоединением активных цепей к обоим парам выводов либо присоединением активной цепи к одной паре, а пассивной цепи к другой паре выводов четырехполюсника.

Электрические цепи, присоединенные к выводам 1–1' и 2–2', могут быть на основании теоремы компенсации в любом режиме замещены источниками ЭДС $\dot{E}_1 = \dot{U}_1$ и $\dot{E}_2 = \dot{U}_2$, которые могут рассматриваться как контурные ЭДС, включенные в два независимых контура четырехполюсника, а токи $\dot{I}_1 = -\dot{I}'_1$ и $\dot{I}_2 = -\dot{I}'_2$ – как контурные токи.

Соотношения между напряжениями и токами на входе и выходе четырехполюсника могут быть записаны в виде следующих ниже шести форм уравнений:

1. Форма $\| Y \|$: \dot{I}_1 и \dot{I}'_2 выражаются в зависимости от \dot{U}_1 и \dot{U}_2 :

$$\left. \begin{aligned} \dot{I}_1 &= Y_{11}\dot{U}_1 + Y_{12}\dot{U}_2; \\ \dot{I}'_2 &= Y_{21}\dot{U}_1 + Y_{22}\dot{U}_2. \end{aligned} \right\} \quad (6.1)$$

2. Форма $\| Z \|$: \dot{U}_1 и \dot{U}_2 выражаются в зависимости от \dot{I}_1 и \dot{I}'_2 :

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_1 &= Z_{11}\dot{I}_1 + Z_{12}\dot{I}'_2; \\ \dot{U}_2 &= Z_{21}\dot{I}_1 + Z_{22}\dot{I}'_2. \end{aligned} \right\} \quad (6.2)$$

3. Форма $\| A \|$: \dot{U}_1 и \dot{I}_1 выражаются в зависимости от \dot{U}_2 и \dot{I}'_2 :

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_1 &= A_{11}\dot{U}_2 + A_{12}\dot{I}'_2; \\ \dot{I}_1 &= A_{21}\dot{U}_2 + A_{22}\dot{I}'_2. \end{aligned} \right\} \quad (6.3)$$

4. Форма $\| B \|$: \dot{U}_2 и \dot{I}'_2 выражаются в зависимости от \dot{U}_1 и \dot{I}'_1 :

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_2 &= B_{11} \dot{U}_1 + B_{12} \dot{I}'_1; \\ \dot{I}'_2 &= B_{21} \dot{U}_1 + B_{22} \dot{I}'_1. \end{aligned} \right\} \quad (6.4)$$

5. Форма $\| H \|$: \dot{U}_1 и \dot{I}'_2 выражаются в зависимости от \dot{I}'_1 и \dot{U}_2 :

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_1 &= H_{11} \dot{I}'_1 + H_{12} \dot{U}_2; \\ \dot{I}'_2 &= H_{21} \dot{I}'_1 + H_{22} \dot{U}_2. \end{aligned} \right\} \quad (6.5)$$

6. Форма $\| G \|$: \dot{I}'_1 и \dot{U}_2 выражаются в зависимости от \dot{I}'_2 и \dot{U}_1 :

$$\left. \begin{aligned} \dot{I}'_1 &= G_{11} \dot{U}_1 + G_{12} \dot{I}'_2; \\ \dot{U}_2 &= G_{21} \dot{U}_1 + G_{22} \dot{I}'_2. \end{aligned} \right\} \quad (6.6)$$

Из перечисленных выше шести форм уравнений рассмотрим более подробно формы $\| Y \|$ и $\| Z \|$.

Коэффициенты и определители каждой системы уравнений четырехполюсника могут быть выражены через коэффициенты и определители любой другой системы.

Контурные токи \dot{I}'_1 и \dot{I}'_2 связаны с контурными ЭДС $\dot{E}_1 = \dot{U}_1$ и $\dot{E}_2 = \dot{U}_2$ (рис. 6.3) линейными уравнениями (6.1).

Коэффициенты Y представляют собой входные и передаточные проводимости контуров 1 и 2. В общем случае – это комплексные величины, зависящие от частоты, они определяются следующим образом:

$$Y_{11} = \left(\frac{\dot{I}'_1}{\dot{U}_1} \right)_{U_2=0} \quad \text{– входная проводимость со стороны выводов 1}$$

при закороченных выводах 2;

$$Y_{22} = \left(\frac{\dot{I}'_2}{\dot{U}_2} \right)_{U_1=0} \quad \text{– выходная проводимость со стороны выводов 2}$$

при закороченных выводах 1;

$$Y_{21} = \left(\frac{\dot{I}'_2}{\dot{U}_1} \right)_{U_2=0} \quad - \text{ передаточная проводимость при закорочен-}$$

ных выводах 2;

$$Y_{12} = \left(\frac{\dot{I}_1}{\dot{U}_2} \right)_{U_1=0} \quad - \text{ передаточная проводимость при закорочен-}$$

ных выводах 1.

В случае обратимого четырехполюсника

$$Y_{12} = Y_{21}, \quad (6.7)$$

т. е. только три коэффициента в уравнениях (6.1) являются независимыми.

Если четырехполюсник симметричен, то наряду с (6.1) выполняется условие

$$Y_{11} = Y_{22}. \quad (6.8)$$

В этом случае число независимых коэффициентов равно двум (например, Y_{11} и Y_{12}).

Коэффициенты Z_{11} , Z_{22} , Z_{21} , Z_{12} в общем случае комплексные и зависят от частоты. Они имеют размерность сопротивления и могут быть определены следующим образом:

$$Z_{11} = \left(\frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} \right)_{I'_2=0} \quad - \text{ входное сопротивление со стороны выводов}$$

1 при разомкнутых выводах 2;

$$Z_{22} = \left(\frac{\dot{U}_2}{\dot{I}'_2} \right)_{I_1=0} \quad - \text{ выходное сопротивление со стороны выво-}$$

дов 2 при разомкнутых выводах 1;

$$Z_{21} = \left(\frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_1} \right)_{I'_2=0} \quad - \text{ передаточное сопротивление при разомкну-}$$

тых выводах 2;

$$Z_{12} = \left(\frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_2'} \right)_{I_1=0} \quad - \text{ передаточное сопротивление при разомкну-}$$

тых выводах 1.

6.3. Схемы замещения четырехполюсника

На основании уравнений четырехполюсника могут быть построены различные схемы замещения, которые облегчают исследование общих свойств рассматриваемой цепи. Ниже показаны некоторые схемы замещения четырехполюсника, параметры которых выражаются через коэффициенты Y , Z и A . На практике чаще всего пользуются П-образной и Т-образной схемами замещения четырехполюсника.

На рис. 6.4 показана П-образная схема замещения четырехполюсника, в которой проводимости ветвей выражены через коэффициенты Y . При этом зависимый источник тока $(Y_{21} - Y_{12}) \dot{U}_1$ сохраняется в эквивалентной схеме только в случае необратимого четырехполюсника; в схеме обратимого четырехполюсника ($Y_{12} = Y_{21}$) источник тока отсутствует (см. рис. 6.5, а).

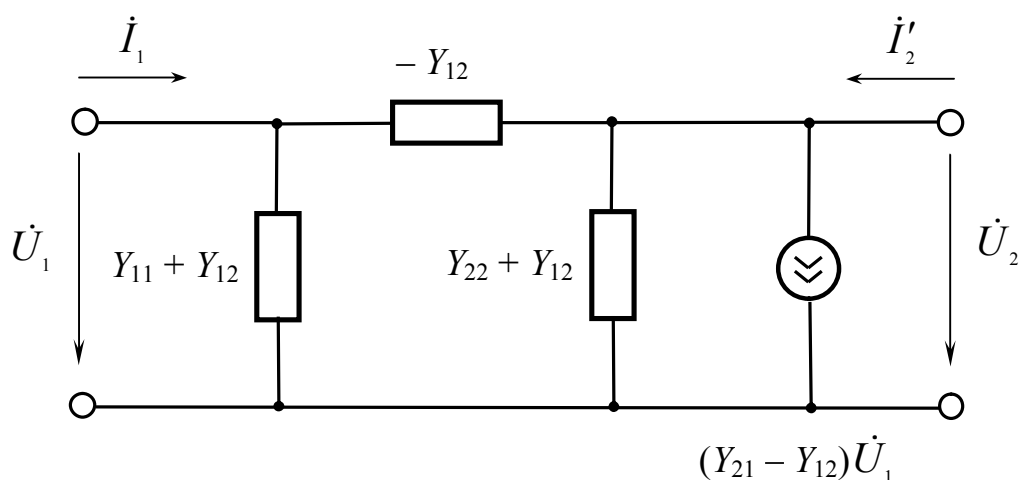


Рис. 6.4. Схемы замещения необратимого четырехполюсника

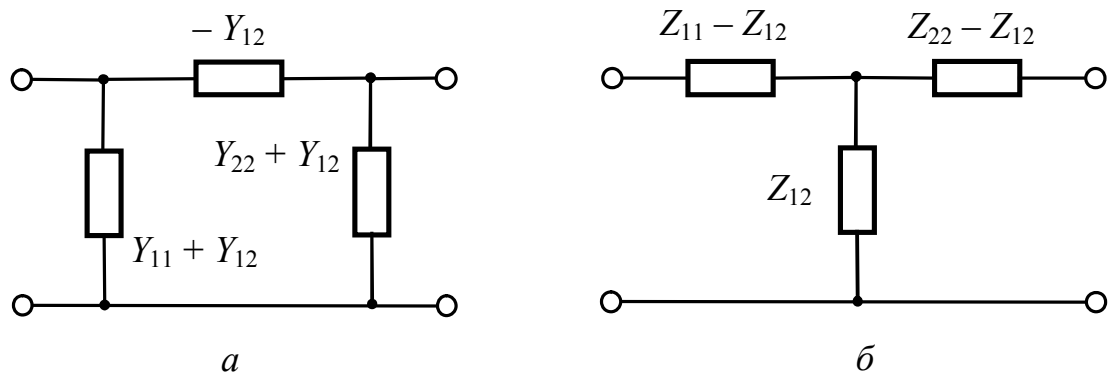


Рис. 6.5. Эквивалентные схемы пассивного четырехполюсника:
а – П-образная эквивалентная схема; б – Т-образная эквивалентная схема

Схема рис.6.5,а соответствует системе уравнений (6.1). Действительно, по первому закону Кирхгофа ток \dot{I}_1 равен сумме токов, входящих в ветви с проводимостями $Y_{11} + Y_{12}$ и $-Y_{12}$. Ток, входящий в первую ветвь, равен $(Y_{11} + Y_{12}) \dot{U}_1$, а ток, входящий во вторую ветвь, равен $-Y_{12}(\dot{U}_1 - \dot{U}_2)$.

Итак,

$$\dot{I}_1 = (Y_{11} + Y_{12}) \dot{U}_1 - Y_{12}(\dot{U}_1 - \dot{U}_2) = Y_{11} \dot{U}_1 + Y_{12} \dot{U}_2.$$

В свою очередь ток \dot{I}_2 равен сумме токов, входящих в ветви с проводимостями $Y_{22} + Y_{12}$ и $-Y_{12}$, и тока источника $(Y_{21} - Y_{12}) \dot{U}_1$. Следовательно,

$$\dot{I}_2 = (Y_{22} + Y_{12}) \dot{U}_2 - Y_{12}(\dot{U}_2 - \dot{U}_1) + (Y_{21} - Y_{12}) \dot{U}_1 = Y_{21} \dot{U}_1 + Y_{22} \dot{U}_2.$$

Применив второй закон Кирхгофа, легко убедиться в том, что уравнениям (6.2) будет соответствовать Т-образная схема замещения. Таким образом, один и тот же четырехполюсник можно представить различными схемами замещения.

Глава 7

ТРЕХФАЗНЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ

7.1. Основные понятия и определения

Трехфазная электрическая цепь (ТЦ) – это совокупность трех однофазных электрических цепей, в которых действуют ЭДС одинаковой частоты, сдвинутые друг относительно друга по фазе и создаваемые общим источником электрической энергии.

Фаза – отдельная электрическая цепь, входящая в состав ТЦ, в которой может существовать один из токов трехфазной системы. Фазами называют и отдельные элементы этой цепи, например фазные обмотки трехфазного источника и др. Общепринятое обозначение фаз ТЦ приведено в табл. 7.1.

Фазное напряжение U_{ϕ} – напряжение между началом и концом фаз источника или приемника. Фазный ток I_{ϕ} – ток в фазе трехфазной цепи.

Линейные провода – провода, соединяющие начала одноименных фаз источника и приемника. Линейный ток $I_{\text{л}}$ – ток в линейных проводах. Линейное напряжение $U_{\text{л}}$ – напряжение между линейными проводами или между началами разных фаз.

Трехфазная система ЭДС (токов, напряжений) – совокупность ЭДС (токов, напряжений) в трехфазной цепи. Трехфазную систему ЭДС (токов, напряжений) называют симметричной, если амплитудные (действующие) значения ЭДС (токов, напряжений) во всех фазах равны и сдвинуты по фазе друг относительно друга на угол $\psi = 2\pi/3$, и несимметричной, если хотя бы одно из приведенных условий не выполняется.

Таблица 7.1

Обозначение фаз в трехфазных электрических цепях

Фаза	Источник		Приемник	
	начало	конец	начало	конец
A	A	X	a	x
B	B	Y	b	y
C	C	Z	c	z

Трехфазная симметричная система ЭДС для мгновенных и комплексных значений может быть описана системой уравнений:

$$\begin{aligned} e_A &= E_m \sin(\omega t + \psi), \quad \dot{E}_A = E e^{j\psi}, \\ e_B &= E_m \sin(\omega t + \psi - \frac{2\pi}{3}), \quad \dot{E}_B = E e^{j\psi} e^{-j2\pi/3} = E e^{j\psi} (-0,5 - j0,867), \\ e_C &= E_m \sin(\omega t + \psi - \frac{4\pi}{3}), \quad \dot{E}_C = E e^{j\psi} e^{-j4\pi/3} = E e^{j\psi} (-0,5 - j0,867). \end{aligned}$$

Здесь индексы A, B, C обозначают принадлежность ЭДС соответствующей фазе трехфазной цепи.

Трехфазные симметричные системы ЭДС (токов, напряжений) удовлетворяют уравнениям:

$$\begin{aligned} e_A + e_B + e_C &= 0, \\ \dot{E}_A + \dot{E}_B + \dot{E}_C &= 0. \end{aligned}$$

Симметричный приемник электрической энергии – трехфазный приемник, у которого комплексные сопротивления всех фаз одинаковы, т. е. $\dot{Z}_a = \dot{Z}_b = \dot{Z}_c$.

Симметричный режим работы ТЦ – режим работы, при котором трехфазные системы напряжений и токов симметричны.

Связанная трехфазная электрическая цепь – цепь, в которой все фазы электрически соединены. Основными способами соединения фаз являются соединения звездой (Y) и треугольником (D).

7.2. Соединение звездой

Схемы соединения звездой в четырех- и трехпроводных цепях приведены на рис. 7.1, где указаны и общепринятые условные положительные направления токов, напряжений и ЭДС. На электрических схемах:

N и n – нейтральные точки источника и приемника соответственно;

$N - n$ – нейтральный (в соответствии с ГОСТ 13109 – нулевой рабочий) провод;

$A - a, B - b, C - c$ – линейные провода;

$\dot{I}_a, \dot{I}_b, \dot{I}_c$ – комплексные фазные и линейные токи одновременно, их совокупность представляет собой трехфазную систему токов;

\dot{I}_N – комплексный ток в нейтральном проводе;

$\dot{U}_{AB}, \dot{U}_{BC}, \dot{U}_{CA}$ – линейные напряжения источника; например, \dot{U}_{AB} – линейное напряжение между линейными проводами A и B или началами фаз A и B источника;

$\dot{U}_A = \dot{U}_{AN}, \dot{U}_B = \dot{U}_{BN}, \dot{U}_C = \dot{U}_{CN}$ – фазные напряжения источника;

$\dot{U}_{ab}, \dot{U}_{bc}, \dot{U}_{ca}$ – линейные напряжения приемника;

$\dot{U}_a = \dot{U}_{an}, \dot{U}_b = \dot{U}_{bn}, \dot{U}_c = \dot{U}_{cn}$ – фазные напряжения приемника;

\dot{U}_{nN} – напряжение между нейтральными точками;

ΔU – падение напряжения на линейных проводах;

$\dot{Z}_a, \dot{Z}_b, \dot{Z}_c$ – комплексные фазные сопротивления приемника;

\dot{Z}_N и $\dot{Z}_{\text{лп}}$ – комплексные сопротивления нейтрального и линейных проводов.

Фаза A трехфазной цепи – участок цепи $NAan$. Аналогично можно выделить фазы B и C этой цепи.

Комплексные фазные сопротивления и проводимости отдельных фаз (без учета внутреннего сопротивления источника) равны

$$\dot{Z}_A = \dot{Z}_a + \dot{Z}_{\text{лп}}, \dot{Z}_B = \dot{Z}_b + \dot{Z}_{\text{лп}}, \dot{Z}_C = \dot{Z}_c + \dot{Z}_{\text{лп}},$$

$$\dot{Y}_A = 1 / \dot{Z}_A, \dot{Y}_B = 1 / \dot{Z}_B, \dot{Y}_C = 1 / \dot{Z}_C.$$

Линейные и фазные напряжения источника электрической энергии связаны соотношениями

$$\dot{U}_{AB} = \dot{U}_A - \dot{U}_B, \dot{U}_{BC} = \dot{U}_B - \dot{U}_C, \dot{U}_{CA} = \dot{U}_C - \dot{U}_A,$$

из которых следует, что $\dot{U}_{AB} + \dot{U}_{BC} + \dot{U}_{CA} = 0$.

Расчеты симметричных и несимметричных режимов в трехфазной цепи могут быть выполнены с помощью законов Ома и Кирхгофа и другими известными методами, подобно расчету однофазных цепей. При этом наиболее целесообразно пользоваться комплексным методом.

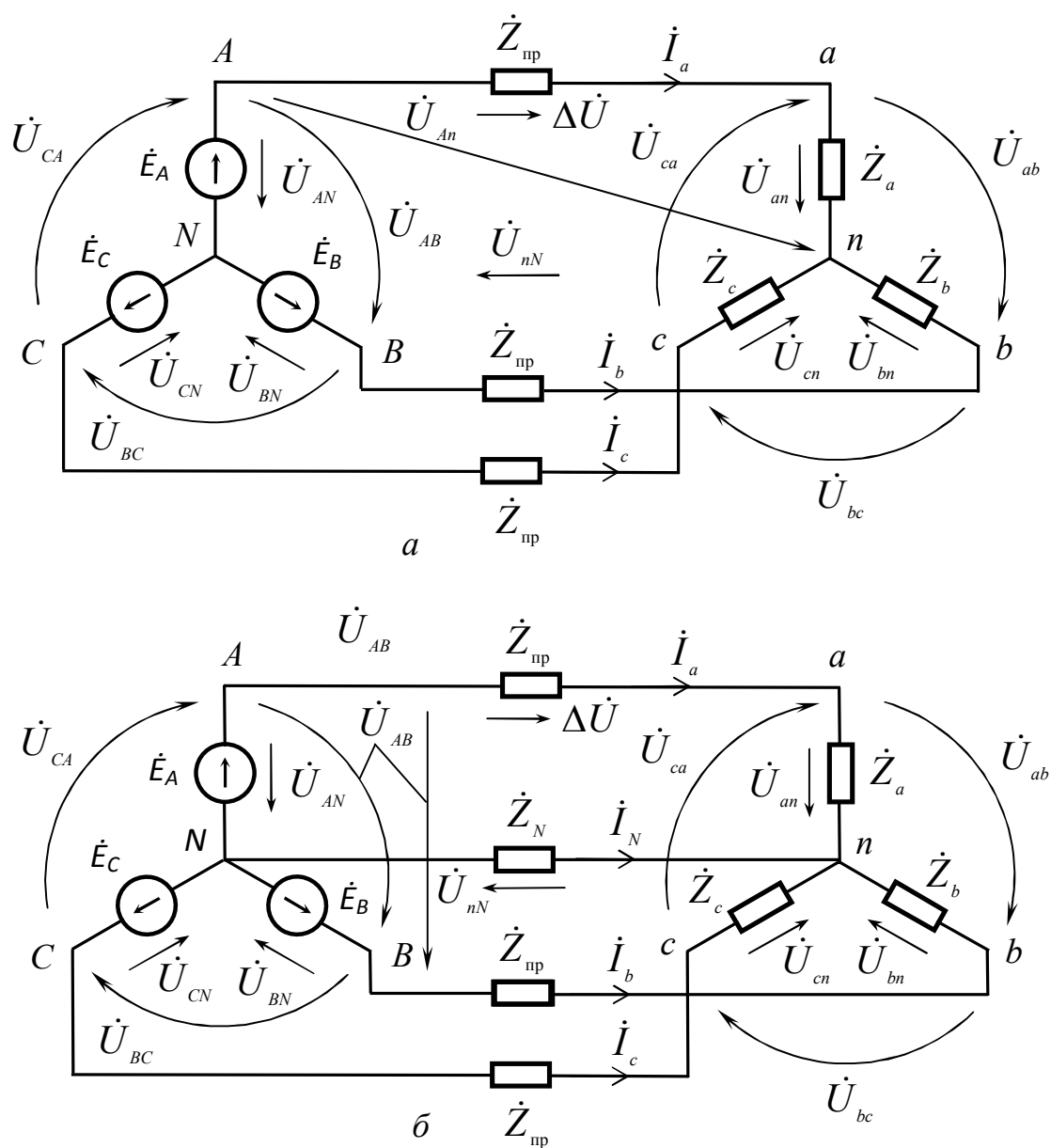


Рис.7.1. Соединение звездой:
 а – трехпроводная схема; б – четырехпроводная схема

Фазные токи и ток в нейтральном проводе определяют по закону Ома в комплексной форме

$$\begin{aligned}
 \dot{I}_a &= \dot{U}_a / \dot{Z}_a = \dot{U}_a \dot{Y}_a = \dot{U}_{An} / \dot{Z}_A = \dot{U}_{An} \dot{Y}_A, \\
 \dot{I}_b &= \dot{U}_b / \dot{Z}_b = \dot{U}_b \dot{Y}_b = \dot{U}_{Bn} / \dot{Z}_B = \dot{U}_{Bn} \dot{Y}_B, \\
 \dot{I}_c &= \dot{U}_c / \dot{Z}_c = \dot{U}_c \dot{Y}_c = \dot{U}_{Cn} / \dot{Z}_C = \dot{U}_{Cn} \dot{Y}_C, \\
 \dot{I}_N &= \dot{U}_{nN} / \dot{Z}_N = \dot{U}_{nN} \dot{Y}_N = \dot{I}_a + \dot{I}_b + \dot{I}_c,
 \end{aligned} \tag{7.1}$$

где $\dot{Y}_a = 1/\dot{Z}_a$ – комплексная проводимость фазы a приемника;

$\dot{Y}_b = 1/\dot{Z}_b$ – комплексная проводимость фазы b приемника;
 $\dot{Y}_c = 1/\dot{Z}_c$ – комплексная проводимость фазы c приемника;
 $\dot{Y}_N = 1/\dot{Z}_N$ – комплексная проводимость нейтрального провода.

Линейные и фазные токи при соединении звездой равны,
т. е. $I_{\text{л}} = I_{\text{ф}}$.

Напряжения \dot{U}_{An} , \dot{U}_{Bn} , \dot{U}_{Cn} определяют по второму закону Кирхгофа. В соответствии со схемой, представленной на рис. 7.1, a , имеем

$$\dot{U}_{An} = \dot{U}_A - \dot{U}_{nN}, \quad \dot{U}_{Bn} = \dot{U}_B - \dot{U}_{nN}, \quad \dot{U}_{Cn} = \dot{U}_C - \dot{U}_{nN},$$

где напряжение \dot{U}_{nN} между нейтральными точками источника и приемника

$$\dot{U}_{nN} = (\dot{U}_A \dot{Y}_A + \dot{U}_B \dot{Y}_B + \dot{U}_C \dot{Y}_C) / (\dot{Y}_A + \dot{Y}_B + \dot{Y}_C + \dot{Y}_N).$$

В трехпроводных цепях (см. рис. 7.1, a) напряжения \dot{U}_{An} , \dot{U}_{Bn} , \dot{U}_{Cn} можно определить по известным линейным напряжениям источника, пользуясь методом узловых потенциалов:

$$\begin{aligned} \dot{U}_{An} &= (\dot{U}_{AB} \dot{Y}_B - \dot{U}_{CA} \dot{Y}_C) / (\dot{Y}_A + \dot{Y}_B + \dot{Y}_C), \\ \dot{U}_{Bn} &= (\dot{U}_{BC} \dot{Y}_C - \dot{U}_{AB} \dot{Y}_A) / (\dot{Y}_A + \dot{Y}_B + \dot{Y}_C), \\ \dot{U}_{Cn} &= (\dot{U}_{CA} \dot{Y}_A - \dot{U}_{BC} \dot{Y}_B) / (\dot{Y}_A + \dot{Y}_B + \dot{Y}_C). \end{aligned} \quad (7.2)$$

Фазные напряжения приемника и падения напряжений в линейных проводах

$$\begin{aligned} \dot{U}_a &= \dot{I}_a \dot{Z}_a, \quad \dot{U}_b = \dot{I}_b \dot{Z}_b, \quad \dot{U}_c = \dot{I}_c \dot{Z}_c, \\ \Delta U_a &= \dot{I}_a \dot{Z}_{np}, \quad \Delta U_b = \dot{I}_b \dot{Z}_{np}, \quad \Delta U_c = \dot{I}_c \dot{Z}_{np}. \end{aligned}$$

Линейные напряжения на зажимах приемника

$$\dot{U}_{ab} = \dot{U}_a - \dot{U}_b, \quad \dot{U}_{bc} = \dot{U}_b - \dot{U}_c, \quad \dot{U}_{ca} = \dot{U}_c - \dot{U}_a,$$

откуда следует, что $\dot{U}_{ab} + \dot{U}_{bc} + \dot{U}_{ca} = 0$.

При симметричной системе напряжений $U_{\text{л}} = \sqrt{3}U_{\text{ф}}$.

7.3. Соединение треугольником

Схема соединения и условные положительные направления всех электрических величин показаны на рис. 7.2. В узлах A , B и C соединены конец одной фазы с началом другой, равно как и в узлах a , b и c приемника.

Токи $\dot{I}_A, \dot{I}_B, \dot{I}_C$ связаны с фазными токами $\dot{I}_{ab}, \dot{I}_{bc}, \dot{I}_{ca}$ следующими соотношениями:

$$\dot{I}_A = \dot{I}_{ab} - \dot{I}_{ca}, \dot{I}_B = \dot{I}_{bc} - \dot{I}_{ab}, \dot{I}_C = \dot{I}_{ca} - \dot{I}_{bc},$$

причем

$$\dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C = 0.$$

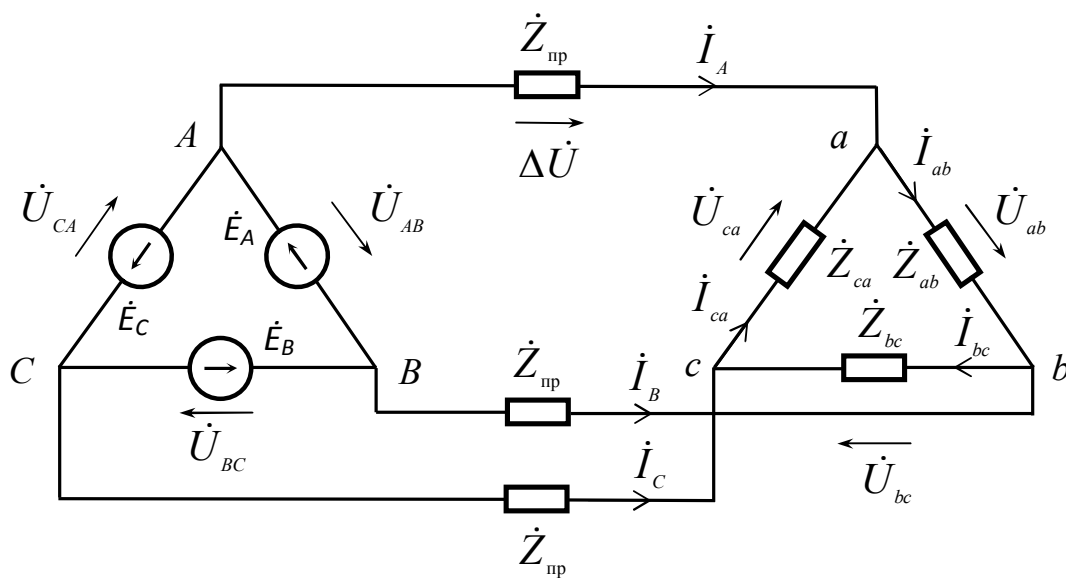


Рис. 7.2. Соединение треугольником

При симметричной нагрузке $I_{\text{л}} = \sqrt{3}I_{\text{ф}}$.

Фазные токи в соответствии с законом Ома равны

$$\dot{I}_{ab} = \dot{U}_{ab} / \dot{Z}_{ab} = \dot{U}_{ab} \dot{Y}_{ab},$$

$$\dot{I}_{bc} = \dot{U}_{bc} / \dot{Z}_{bc} = \dot{U}_{bc} \dot{Y}_{bc},$$

$$\dot{I}_{ca} = \dot{U}_{ca} / \dot{Z}_{ca} = \dot{U}_{ca} \dot{Y}_{ca}.$$

При соединении треугольником $U_{\text{л}} = U_{\text{ф}}$.

Связь между линейными напряжениями источника и приемника с учетом падения напряжения в линейных проводах при условии равенства их сопротивлений $\dot{Z}_{\text{л}}$ устанавливается нижеприведенными соотношениями:

$$\begin{aligned} \dot{U}_{ab} &= \dot{U}_{AB} - \dot{Z}_{\text{л}} (\dot{I}_A - \dot{I}_B), \\ \dot{U}_{bc} &= \dot{U}_{BC} - \dot{Z}_{\text{л}} (\dot{I}_B - \dot{I}_C), \\ \dot{U}_{ca} &= \dot{U}_{CA} - \dot{Z}_{\text{л}} (\dot{I}_C - \dot{I}_A). \end{aligned} \quad (7.3)$$

При симметричной нагрузке, когда $\dot{Z}_{ab} = \dot{Z}_{bc} = \dot{Z}_{ca} = \dot{Z}$,

$$\dot{U}_{ab} = \dot{U}_{AB} \dot{Z} / (\dot{Z} + 3\dot{Z}_{np}),$$

$$\dot{U}_{bc} = \dot{U}_{BC} \dot{Z} / (\dot{Z} + 3\dot{Z}_{np}),$$

$$\dot{U}_{ca} = \dot{U}_{CA} \dot{Z} / (\dot{Z} + 3\dot{Z}_{np}),$$

так как в этом случае разность линейных токов в уравнениях (7.3) в три раза больше фазного тока, например $\dot{I}_A - \dot{I}_B = 3\dot{I}_{ab}$.

При несимметричной нагрузке расчет можно упростить, если приемник, соединенный треугольником, заменить эквивалентным приемником, соединенным звездой (рис 7.3). Параметры эквивалентного приемника связаны с параметрами реального приемника следующими соотношениями:

$$\dot{Z}_a = \dot{Z}_{ab} \dot{Z}_{ca} / \Sigma \dot{Z}, \quad \dot{Z}_b = \dot{Z}_{bc} \dot{Z}_{ab} / \Sigma \dot{Z}, \quad \dot{Z}_c = \dot{Z}_{ca} \dot{Z}_{bc} / \Sigma \dot{Z},$$

где $\Sigma \dot{Z} = \dot{Z}_{ab} + \dot{Z}_{bc} + \dot{Z}_{ca}$.

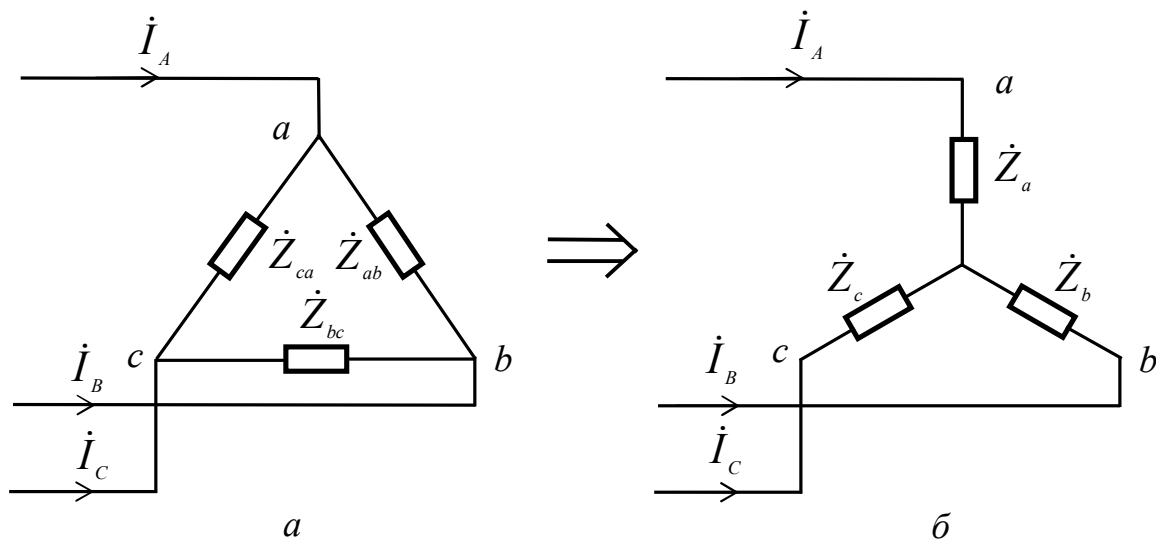


Рис. 7.3. Эквивалентные соединения: a – треугольником; b – звездой

В эквивалентной цепи находят линейные токи \dot{I}_A , \dot{I}_B , \dot{I}_C (см. уравнения (7.1) и (7.2)), линейные напряжения \dot{U}_{ab} , \dot{U}_{bc} , \dot{U}_{ca} на зажимах приемника и, наконец, определяют фазные токи \dot{I}_{ab} , \dot{I}_{bc} , \dot{I}_{ca} .

7.4. Мощность трехфазной цепи

В трехфазной цепи полную, активную и реактивную фазные мощности определяют как и в однофазных цепях:

$$\dot{S}_\phi = \dot{U}_\phi \dot{I}_\phi^* = S_\phi e^{j\varphi} = P_\phi + jQ_\phi,$$

$$S_\phi = |\dot{S}_\phi| = \sqrt{P_\phi^2 + Q_\phi^2},$$

$$P_\phi = \operatorname{Re}(\dot{S}_\phi) = \dot{U}_\phi \dot{I}_\phi \cos \varphi,$$

$$Q_\phi = \operatorname{Im}(\dot{S}_\phi) = \dot{U}_\phi \dot{I}_\phi \sin \varphi,$$

где \dot{I}_ϕ^* – сопряженный комплексный фазный ток.

Мощность трехфазного приемника или источника

$$\dot{S} = \sum_{n=1}^3 \dot{S}_\phi = \sum_{n=1}^3 P_\phi + j \sum_{n=1}^3 Q_\phi = P + jQ,$$

$$S = |\dot{S}| = \sqrt{P^2 + Q^2}, \quad P = \sum_{n=1}^3 P_\phi, \quad Q = \sum_{n=1}^3 Q_\phi.$$

При симметричном режиме трехфазной цепи

$$\dot{S} = 3\dot{S}_\phi, \quad S = 3U_\phi I_\phi = \sqrt{3}U_{\text{Л}} I_{\text{Л}},$$

$$P = 3P_\phi = 3U_\phi I_\phi \cos \varphi = \sqrt{3}U_{\text{Л}} I_{\text{Л}} \cos \varphi,$$

$$Q = 3Q_\phi = 3U_\phi I_\phi \sin \varphi = \sqrt{3}U_{\text{Л}} I_{\text{Л}} \sin \varphi.$$

Глава 8

ТРАНСФОРМАТОРЫ

8.1. Устройство и принцип действия трансформатора

Различают трансформаторы напряжения и трансформаторы тока. Трансформатор напряжения – статический электромагнитный аппарат, предназначенный для преобразования одного переменного по величине напряжения в другое при одной и той же частоте. Трансформатор тока – прибор, предназначенный для преобразования одного переменного по величине тока в другой при одной и той же частоте.

В конструктивном отношении трансформаторы тока и напряжения незначительно отличаются друг от друга.

Трансформатор напряжения состоит из стального сердечника, собранного из тонких листов электротехнической стали, изолированных друг от друга с целью снижения потерь мощности на вихревые токи.

На сердечнике однофазного трансформатора (рис. 8.1) расположены две обмотки из изолированного провода. К первичной обмотке подводится питающее (первичное) напряжение U_1 . Со вторичной его обмотки снимается напряжение U_2 , которое подводится к потребителю электрической энергии (нагрузке) Z_n .

Во многих случаях трансформатор имеет не две, а несколько вторичных обмоток (многообмоточный трансформатор), к каждой из которых подключается свой потребитель электроэнергии. В конструктивном отношении различают однофазные и трехфазные трансформаторы.

В процессе работы переменный ток, проходя по виткам первичной обмотки трансформатора, возбуждает в сердечнике магнитопровода переменный магнитный поток $\Phi(t)$. Изменяясь во времени по синусоидальному закону $\Phi = \Phi_m \sin \omega(t)$, этот поток пронизывает витки как первичной w_1 так и вторичной w_2 обмоток трансформатора. При этом в соответствии с законом электромагнитной индукции в обмотках наводятся ЭДС, мгновенные значения которых для первичной и вторичной обмоток составляют:

$$e_1 = w_1 \frac{d\Phi}{dt} = E_{m1} \sin(\omega t + \pi/2),$$

$$e_2 = w_2 \frac{d\Phi}{dt} = E_{m2} \sin(\omega t + \pi/2),$$

где w_1 и w_2 – число витков первичной и вторичной обмоток трансформатора;

E_{m1} и E_{m2} – амплитудные значения ЭДС в первичной и вторичной обмотках.

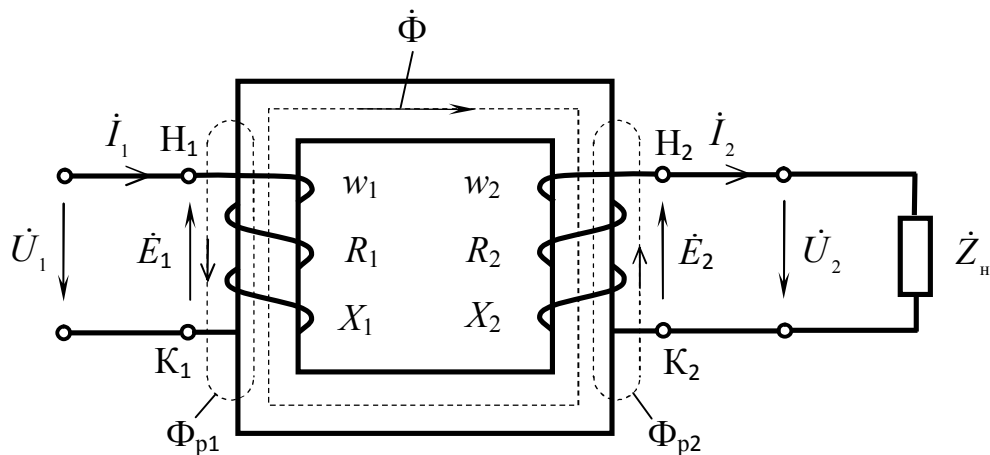


Рис. 8.1. Схема подключения однофазного двухобмоточного трансформатора

Из полученных уравнений следует, что ЭДС E_1 , так же как и ЭДС E_2 трансформатора, опережает магнитный поток Φ на угол $\pi/2$.

8.2. Режим холостого хода трансформатора. Коэффициент трансформации

Ток I_1 первичной обмотки трансформатора при отключенном потребителе электроэнергии ($I_2 = 0$) является намагничивающим током холостого хода $I_1 = I_0$.

Пренебрегая влиянием насыщения, несинусоидальный намагничивающий ток можно заменить эквивалентным синусоидальным: $i_0 = I_{m0} \sin(\omega t + \alpha)$.

Входящий в уравнение угол магнитных потерь α (угол сдвига по фазе между током и магнитным потоком трансформатора)

тора) обусловлен потерями мощности в магнитопроводе трансформатора.

Значение угла α для современных электротехнических сталей обычно невелико и составляет порядка $4...6^\circ$; им можно пренебречь, считая $i_0 = I_{m0} \sin \omega t$. Напряжение, подводимое в режиме холостого хода к трансформатору, в соответствии со вторым законом Кирхгофа для первичной обмотки составит

$$\dot{U}_1 = \dot{E}_1 + R_1 \dot{I}_0 + jX_1 \dot{I}_0 = \dot{E}_1 + \dot{I}_0 (R_1 + jX_1) = \dot{E}_1 + \dot{I}_0 \dot{Z}_0, \quad (8.1)$$

где R_1 – активное сопротивление первичной обмотки;

X_1 – индуктивное сопротивление первичной обмотки, обусловленное потоками рассеяния.

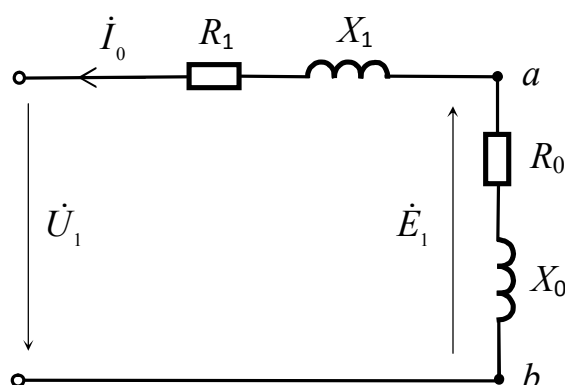


Рис. 8.2. Схема замещения трансформатора при холостом ходе

Нетрудно видеть, что в режиме холостого хода трансформатор фактически ведет себя как обычная катушка с ферромагнитным сердечником, для которой справедливо соотношение

$$\dot{E}_1 = \dot{I}_0 \dot{Z}_0 = \dot{I}_0 (R_0 + jX_0),$$

где R_0 – активное сопротивление, обусловленное потерями мощности в магнитопроводе;

X_0 – реактивное индуктивное сопротивление, обусловленное основным магнитным потоком.

С учетом этого выражение (8.1), записанное для первичной обмотки трансформатора, преобразуют к виду

$$\dot{U}_1 = R_1 \dot{I}_0 + jX_1 \dot{I}_0 + \dot{E}_1 = R_1 \dot{I}_0 + jX_1 \dot{I}_0 + R_0 \dot{I}_0 + jX_0 \dot{I}_0. \quad (8.2)$$

Исходя из уравнения электрического равновесия (8.2) на рис. 8.2. представлена полная схема замещения (ab – намагничивающая цепь).

При синусоидальном изменении магнитного потока и отсутствии насыщения магнитной системы действующие значения ЭДС, наводимых в первичной и вторичной обмотках трансформатора, определяют по формулам

$$E_1 = 4,44 w_1 f_1 \Phi_m \text{ и } E_2 = 4,44 w_2 f_1 \Phi_m,$$

где f_1 – частота переменного тока;

Φ_m – амплитудное значение магнитного потока трансформатора.

Отношение ЭДС E_1 первичной обмотки трансформатора к ЭДС E_2 вторичной его обмотки, равное отношению соответствующих чисел витков обмоток, называют коэффициентом трансформации трансформатора:

$$E_1/E_2 = w_1/w_2 = n.$$

При $E_1 < E_2$ трансформатор является повышающим ($n < 1$); при $E_1 > E_2$ – понижающим ($n > 1$).

8.3. Рабочий режим трансформатора

Исследование работы трансформатора при нагрузке удобно производить на основе векторных диаграмм, построенных исходя из схемы замещения трансформатора, заменяющей реальный трансформатор, в которой параметры вторичной обмотки приведены к напряжению и числу витков первичной обмотки. При нагрузке трансформатора ко вторичной его обмотке подключается потребитель электрической энергии Z_n . При этом ток во вторичной обмотке нагруженного трансформатора, согласно закону Ома, определяют отношением

$$I_2 = U_2 / Z_n,$$

где $Z_n = \sqrt{R_n^2 + X_n^2}$ – полное сопротивление нагрузки.

В соответствии со вторым законом Кирхгофа для первичной и вторичной обмоток нагруженного трансформатора можно записать соответственно уравнения электрического равновесия:

$$\begin{aligned}\dot{U}_1 &= \dot{I}_1 \dot{Z}_1 + \dot{E}_1 = (R_1 + jX_1) \dot{I}_1 + \dot{E}_1; \\ \dot{E}_2 &= (R_2 + jX_2) \dot{I}_2 + \dot{U}_2,\end{aligned}$$

где \dot{I}_1 и \dot{I}_2 – комплексные токи первичной и вторичной обмоток нагруженного трансформатора;

R_1 и R_2 – активные сопротивления первичной и вторичной обмоток;

X_1 и X_2 – индуктивные сопротивления первичной и вторичной обмоток, обусловленные потоками рассеяния Φ_{p1} и Φ_{p2} (см. рис. 8.1).

Так как падение напряжения на первичной обмотке трансформатора $I_1 Z_1 = I_1 \sqrt{R_1^2 + X_1^2}$ в пределах до номинального тока $I_{1\text{ном}}$ нагрузки обычно мало по сравнению с ЭДС E_1 , то можно приближенно считать, что

$$U_1 = E_1 = 4,44 w_1 f_1 \Phi_m.$$

Из этого следует, что при неизменном значении f_1 и напряжении питающей сети $U_1 = \text{const}$ при нагрузке трансформатора ЭДС E_1 можно считать неизменной: $E_1 = \text{const}$. Так как ЭДС наводится результирующим магнитным потоком, то этот поток должен также оставаться практически постоянным в пределах от холостого хода до номинальной нагрузки трансформатора, т. е. $\Phi_m = \text{const}$.

8.4. Полная схема замещения трансформатора

Первичную ЭДС E_1 равную E_2' как указывалось, можно заменить векторной суммой активного и реактивного индуктивного падений напряжения на участке намагничивающей цепи ab в соответствии с уравнением

$$\dot{E}_1 = R_0 \dot{I}_0 + jX_0 \dot{I}_0 = \dot{I}_0 (R_0 + jX_0) = \dot{I}_0 \dot{Z}_0,$$

где X_0 – индуктивное сопротивление, обусловленное основным магнитным потоком Φ трансформатора;

R_0 – активное сопротивление, обусловленное магнитными потерями мощности в магнитопроводе трансформатора, т. е. некоторое условное активное сопротивление, в котором выделяется

активная мощность $P_m = R_0 I_0^2$, равная потерям мощности в магнитопроводе.

С учетом полученных уравнений для U_1 и E_2 , при наличии приведенных параметров вторичной обмотки трансформатора, можно записать уравнение электрического равновесия для вторичной обмотки:

$$\dot{U}'_2 = \dot{E}'_2 - (R'_2 + jX'_2) \dot{I}'_2.$$

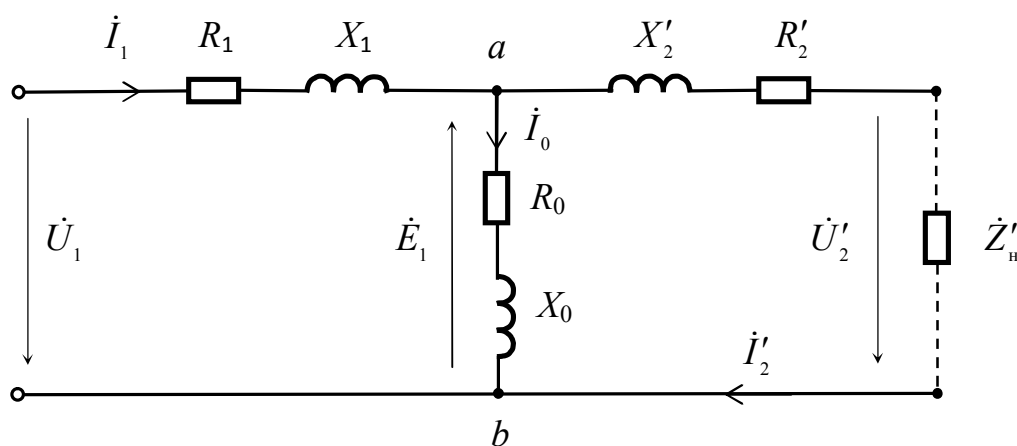


Рис. 8.3. Полная (Т-образная) схема замещения трансформатора

Таким образом электромагнитная связь, существующая между первичной и вторичной обмотками реального трансформатора, заменяется непосредственной (гальванической) связью в схеме замещения трансформатора, что значительно упрощает изучение вопросов теории и расчета трансформаторов.

8.5. Трехфазный трансформатор

Процесс трансформирования трехфазной системы напряжений может быть осуществлен либо с помощью группы, состоящей из трех однофазных трансформаторов, либо одним трехфазным трансформатором, который имеет меньшие габариты и стоимость, чем группа однофазных трансформаторов. Основные элементы трехфазного трансформатора показаны на рис. 8.4.

В отличие от однофазных трехфазные двухобмоточные трансформаторы содержат общий трехстержневой магнитопро-

вод, набранный из тонких изолированных листов электротехнической стали, с двумя фазными обмотками – первичной и вторичной, расположенными на каждом из стержней.

Начала и концы трех фаз первичной обмотки трансформатора обозначают буквами AX, BY, CZ , начала и концы трех фаз вторичной обмотки – ax, by, cz . К началам A, B, C первичных обмоток подают напряжения U_{AB}, U_{BC}, U_{CA} питающей сети. При этом концы первичных фазных обмоток и концы фаз x, y, z вторичных обмоток в зависимости от величины фазных напряжений соединяют либо звездой, либо треугольником.

К началам фаз a, b, c вторичной обмотки подключают трехфазный потребитель с фазными нагрузками Za, Zb, Zc , в данном случае также соединенных звездой (соединение обмотки трехфазного трансформатора звездой обозначают знаком \star , а треугольником – Δ).

При подаче напряжения питающей сети в фазах первичной обмотки трансформатора появляются фазные токи $\dot{I}_A, \dot{I}_B, \dot{I}_C$, так же как и фазные напряжения $\dot{U}_A, \dot{U}_B, \dot{U}_C$, сдвинутые друг относительно друга по фазе на угол $2\pi/3$. Под действием этих токов в стержнях магнитопровода возникают соответственно магнитные потоки $\dot{\Phi}_A, \dot{\Phi}_B, \dot{\Phi}_C$, также сдвинутые друг относительно друга по фазе на угол $2\pi/3$, причем векторная сумма этих потоков равна нулю ($\dot{\Phi}_A + \dot{\Phi}_B + \dot{\Phi}_C = 0$).

Таким образом, в результате реализации процесса трансформирования трехфазной системы напряжений питающей сети с помощью трехфазного трансформатора становится возможным в соответствии с коэффициентом трансформации $n = U_1/U_2$, равным отношению первичного напряжения ко вторичному понизить или соответственно повысить напряжение, подаваемое на зажимы потребителя электроэнергии в сравнении с величиной напряжения питающей сети.

При симметричной нагрузке схемы замещения и векторные диаграммы каждой фазы трехфазного трансформатора идентичны и имеют тот же вид, что и у однофазного трансформатора. Вследствие этого формулы, полученные для однофазного трансформатора, справедливы и для каждой из фаз трехфазного трансформатора.

В трехфазных мощных силовых трансформаторах для отвода теплоты, выделяемой в обмотках при протекании токов, предусмотрена радиаторная система охлаждения. При этом бак трансформатора, в котором размещены магнитопровод с обмотками, заполняют специальным трансформаторным маслом, которое отводит теплоту от обмоток и в то же время является дополнительной электрической изоляцией между витками обмоток и заземленными частями трансформатора.

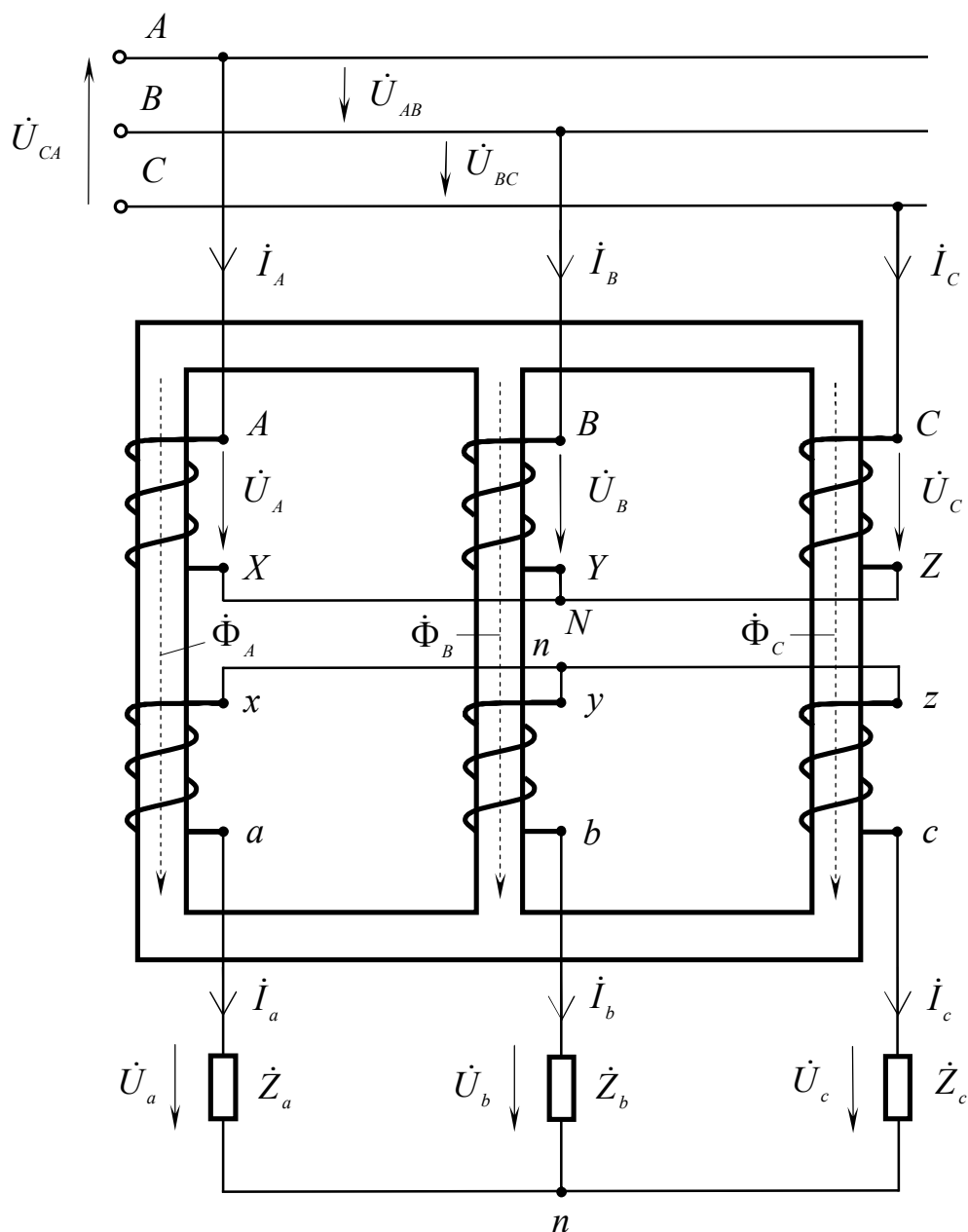


Рис. 8.4. Устройство трансформатора и схема его включения

В процессе работы трансформаторов, особенно устанавливаемых на открытой части подстанции, вследствие колебания температуры окружающего воздуха происходит изменение объема масла в баке трансформатора, во избежание чего трансформатор снабжают специальным расширителем, обеспечивающим полное заполнение бака трансформатора независимо от влияния внешней среды.

8.6. Автотрансформатор

Автотрансформаторы относят к группе специальных трансформаторов. Различают однофазные и трехфазные автотрансформаторы. Каждую фазу трехфазного автотрансформатора выполняют в виде однофазного автотрансформатора. В конструктивном отношении автотрансформаторы выполняют так же, как и обычные трансформаторы. Отличительной особенностью автотрансформатора является то, что его первичная и вторичная обмотки имеют непосредственное электрическое (гальваническое) соединение, причем обмотка низшего напряжения с числом витков w_2 является частью обмотки высшего напряжения с числом витков $w_1 > w_2$.

В зависимости от того, на какую из обмоток подается первичное напряжение U_1 , автотрансформатор может быть как понижающим, так и повышающим.

На рис. 8.5 представлена принципиальная схема однофазного понижающего автотрансформатора ($U_1 > U_2$). Автотрансформатор, так же как и обычный трансформатор, содержит магнитопровод, изготовленный из изолированных друг от друга тонких листов электротехнической стали, на котором намотана обмотка AX , состоящая из секций ac и ax , электрически соединенных между собой в точке a . К первичной обмотке AX автотрансформатора подается первичное напряжение U_1 , со вторичной обмотки ax снимается вторичное напряжение U_2 , подаваемое на зажимы нагрузочного сопротивления Z_H .

В данном случае напряжение U_1 , подводимое к первичной обмотке AX , больше вторичного напряжения U_2 , подаваемого на зажимы нагрузки Z_H . Так как при этом ЭДС E_1 больше ЭДС E_2 , то автотрансформатор работает в режиме понижения напряжения.

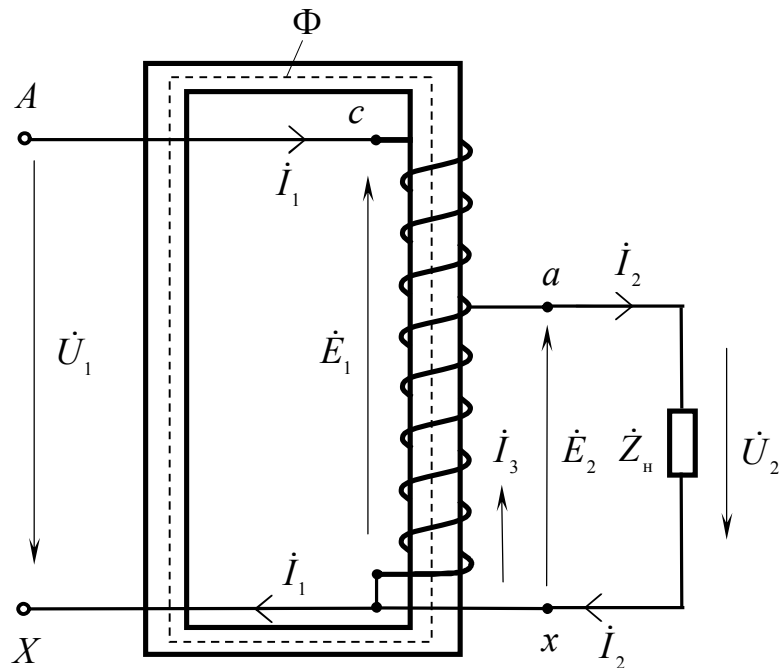


Рис. 8.5. Устройство и схема включения автотрансформатора

При подаче к виткам cx обмотки первичного напряжения U_1 и подключении нагрузочного сопротивления Z_H к напряжению U_2 , снимаемому с обмотки AX , автотрансформатор будет работать в режиме понижения напряжения. Пренебрегая падениями напряжения в обмотках и током холостого хода, коэффициент трансформации автотрансформатора независимо от того, в каком режиме он работает, может быть представлен в виде отношений:

$$n = \frac{w_1}{w_2} = \frac{E_1}{E_2} \approx \frac{U_1}{U_2}.$$

Автотрансформаторы довольно широко применяют в схемах электропередачи для пуска крупных синхронных и асинхронных короткозамкнутых электродвигателей, для осветительных установок, в схемах автоматики, радиоэлектроники и проводной связи. В трехфазных сетях используют автотрансформаторы в трехфазном исполнении. В лабораторных условиях широкое применение находят автотрансформаторы с плавной регулировкой выходного напряжения – лабораторные автотрансформаторы (ЛАТРы), в которых соединение в точке c об-

мотки выполняют в виде подвижного контакта, обеспечивающего плавный переход с одного витка обмотки на другой, при этом происходит изменение коэффициента трансформации n трансформатора, а следовательно, создается возможность плавного изменения напряжения на зажимах потребителя электроэнергии в широком диапазоне.

Недостатком автотрансформаторов является наличие гальванической связи между его обмотками, что требует применения усиленной изоляции обмоток для обеспечения безопасности обслуживающего персонала. Существенным недостатком автотрансформаторов является то, что они имеют малое сопротивление короткого замыкания, что обуславливает значительную кратность тока короткого замыкания. Существование электрической связи между источником питания и потребителем электроэнергии делает невозможным применение автотрансформаторов при наличии у потребителей электроэнергии заземленного полюса, в частности в выпрямительных устройствах.

Следует отметить, что при отрыве витков обмотки автотрансформатора на участке ax (см. рис. 8.5) высокое напряжение U_1 проникает в цепь низкого напряжения U_2 , в результате чего возрастает опасность поражения током обслуживающего персонала, в связи с чем исходя из соображений безопасности в ряде случаев применять автотрансформатор не допускается. В трехфазных сетях находят применение трехфазные автотрансформаторы, обмотки которых обычно соединяют звездой.

Глава 9

ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ДВИГАТЕЛИ

Электрические двигатели бывают двух типов: электрические генераторы и двигатели. Генераторы вырабатывают электрическую энергию. При этом подвижную часть электрической машины (якорь – у машин постоянного типа, ротор – у машин переменного тока) вращают какой-то внешней силой (водой, паром, газом и др.). С неподвижной обмотки – статора – при этом снимают электрическую энергию. У двигателей наоборот – электрическую энергию, подаваемую на двигатель, превращают в механическую энергию вращения подвижной части машины. В принципе любая электрическая машина может работать и как генератор, и как двигатель, но практически эти два типа машин имеют особенности, поэтому промышленность выпускает отдельно генераторы и отдельно двигатели. В металлургическом и механико-машиностроительном производстве чаще используют электрические двигатели.

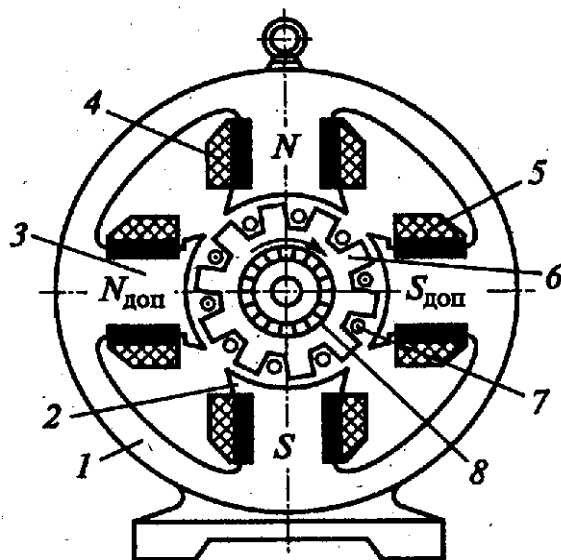
9.1. Электрические двигатели постоянного тока

9.1.1. Устройство и принцип действия электродвигателей постоянного тока

Электродвигатель постоянного тока – электрическая машина, предназначенная для преобразования электрической энергии постоянного тока в механическую.

Электродвигатели постоянного тока в конструктивном отношении не отличаются от генераторов постоянного тока, так как электрические машины постоянного тока обратимы и могут работать как в генераторном, так и в двигательном режимах. На неподвижной части электродвигателя постоянного тока (рис. 9.1) статоре (станине 1) расположены главные 2 и дополнительные 3 полюса с обмотками возбуждения 4 и 5. Подвижной частью электродвигателя является якорь 6, набранный из тонких изолированных друг от друга листов электротехнической стали для уменьшения потерь мощности на гистерезис $P_{\text{г}}$ вследствие перемагни-

чивания и потерь мощности от вихревых токов $P_{\text{вх}}$ в магнитопроводе якоря. В пазах якоря размещена обмотка якоря 7, выводы которой соединены с пластинами коллектора 8, смонтированного



на валу электродвигателя.

Рис. 9.1. Устройство электродвигателя постоянного тока

При подаче постоянного напряжения к зажимам электрического двигателя постоянного тока в обмотках возбуждения и якоря возникают токи. В результате взаимодействия тока якоря с магнитным потоком, создаваемым обмоткой возбуждения в магнитопроводе статора возникает электромагнитный момент электродвигателя, под действием которого якорь приходит во вращение. При этом электромагнитный момент, развиваемый двигателем,

$$M = c_M \Phi I_{\text{я}},$$

где c_M — коэффициент, зависящий от конструкции обмотки якоря и числа полюсов электродвигателя;

Φ — магнитный поток одной пары главных полюсов электродвигателя;

$I_{\text{я}}$ — ток якоря электродвигателя.

При вращении якоря в его обмотке в результате пересечения магнитных силовых линий наводится ЭДС, которая при работе машины в режиме двигателя направлена против тока якоря

и, так же как и при работе машины в режиме генератора, составляет

$$E = c_e \Phi n,$$

где c_e – коэффициент, зависящий от конструктивных элементов машины;

n – частота вращения якоря электродвигателя.

Для изменения направления вращения электродвигателя постоянного тока необходимо изменить полярность напряжения, подводимого к якорю или обмотке возбуждения. В зависимости от способа включения обмотки возбуждения различают электродвигатели постоянного тока с параллельным, последовательным и смешанным возбуждением.

У двигателей с параллельным возбуждением обмотка рассчитана на полное напряжение питающей сети и включается параллельно цепи якоря (рис. 9.2).

Двигатель с последовательным возбуждением имеет обмотку возбуждения, которая включается последовательно с якорем, поэтому эта обмотка рассчитана на полный ток якоря (рис 9.3).

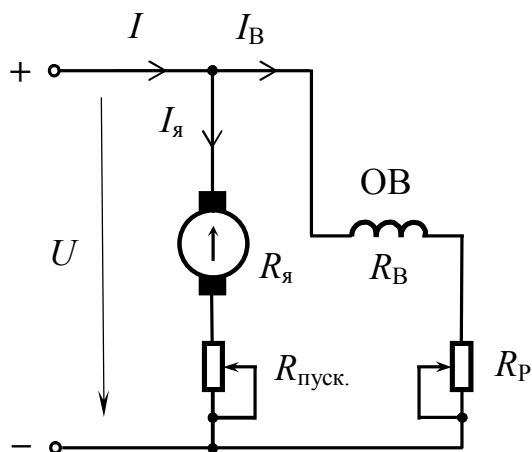


Рис. 9.2. Схема включения электродвигателя постоянного тока с параллельным возбуждением

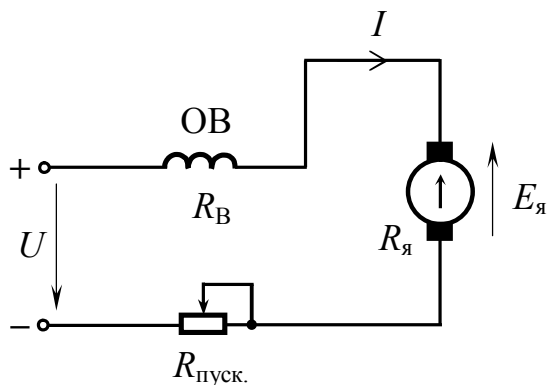


Рис. 9.3. Схема включения электродвигателя постоянного тока с последовательным возбуждением

Двигатели со смешанным возбуждением имеют две обмотки: одна включается параллельно, другая – последовательно с якорем.

9.1.2. Способы пуска в ход электродвигателей постоянного тока

При пуске в ход электродвигателей постоянного тока (независимо от способа возбуждения) путем прямого включения в питающую сеть возникают значительные пусковые токи, которые могут привести к выходу двигателей из строя. Это происходит в результате выделения значительного количества теплоты в обмотке якоря и последующего нарушения ее изоляции, поэтому пуск в ход двигателей постоянного тока производится специальными пусковыми приспособлениями. В большинстве случаев для этих целей применяют простейшее пусковое приспособление – пусковой реостат. Процесс пуска электродвигателя постоянного тока с пусковым реостатом показан на примере двигателя постоянного тока с параллельным возбуждением (см. рис. 9.2).

Исходя из уравнения, составленного в соответствии со вторым законом Кирхгофа для левой части электрической цепи (см. рис. 9.2), ток якоря

$$I_{\text{я}} = \frac{U - E}{R_{\text{я}}} = \frac{U - c_e n \Phi}{R_{\text{я}}},$$

где U – напряжение, подводимое к электродвигателю;

$R_{\text{я}}$ – сопротивление обмотки якоря.

В начальный момент пуска электродвигателя частота вращения якоря $n = 0$, поэтому противоЭДС, наводимая в обмотке якоря, в соответствии с полученным ранее выражением также будет равной нулю: $E = c_e \Phi n = 0$.

Сопротивление обмотки якоря $R_{\text{я}}$ – величина довольно малая. Для того чтобы ограничить возможный при этом недопустимо большой ток в цепи якоря при пуске, последовательно с якорем (независимо от способа возбуждения двигателя) включа-

ют пусковой реостат (пусковое сопротивление $R_{\text{пуск}}$). В этом случае пусковой ток якоря

$$I_{\text{я.пуск}} = (U - 0)/(R_{\text{я}} + R_{\text{пуск}}).$$

Сопротивление пускового реостата $R_{\text{пуск}}$ рассчитывают для работы только на время пуска и подбирают таким образом, чтобы пусковой ток якоря электродвигателя не превышал допустимого значения из расчета ($I_{\text{я.пуск}} \leq 2I_{\text{я.норм}}$). По мере разгона электродвигателя ЭДС, наводимая в обмотке якоря, вследствие возрастания частоты его вращения n возрастает. В результате этого ток якоря при прочих равных условиях уменьшается. При этом сопротивление пускового реостата $R_{\text{пуск}}$ по мере разгона якоря электродвигателя необходимо постепенно уменьшать. После окончания разгона двигателя до номинального значения частоты вращения якоря ЭДС возрастает настолько, что пусковое сопротивление может быть сведено к нулю, без опасности значительного возрастания тока якоря.

Таким образом, пусковое сопротивление $R_{\text{пуск}}$ в цепи якоря необходимо только при пуске. В процессе нормальной работы электродвигателя оно должно быть отключено, во-первых, потому что рассчитано на кратковременную работу во время пуска, во-вторых, при наличии пускового сопротивления в нем будут возникать тепловые потери мощности, равные $R_{\text{пуск}} I_{\text{я}}^2$, существенно снижающие КПД электродвигателя.

Для электродвигателя постоянного тока с параллельным возбуждением в соответствии со вторым законом Кирхгофа для якорной цепи (см. рис. 9.2) уравнение электрического равновесия имеет вид

$$E = U - R_{\text{я}} I_{\text{я}}.$$

С учетом выражения для ЭДС ($E = c_e \Phi n$), записав полученную формулу относительно частоты вращения, получим уравнение частотной (скоростной) характеристики электродвигателя $n(I_{\text{я}})$:

$$n = \frac{U - R_{\text{я}} I_{\text{я}}}{c_e \Phi} = \frac{U}{c_e \Phi} - \frac{R_{\text{я}}}{c_e \Phi} I_{\text{я}}. \quad (9.1)$$

Из него следует, что при отсутствии нагрузки на валу и токе якоря $I_{\text{я}} = 0$ частота вращения электродвигателя при данном значении питающего напряжения

$$n = U / c_e \Phi = n_0 . \quad (9.2)$$

Частота n_0 является частотой вращения идеального холостого хода. Кроме параметров электродвигателя она зависит также от значения подводимого напряжения и магнитного потока.

С уменьшением магнитного потока при прочих равных условиях частота вращения идеального холостого хода возрастает, поэтому в случае обрыва цепи обмотки возбуждения, когда ток возбуждения становится равным нулю ($I_b = 0$), магнитный поток двигателя снижается до величины, равной небольшому значению остаточного магнитного потока $\Phi_{ост}$. При этом двигатель «идет в разнос», развивая частоту вращения, намного большую номинальной, что представляет определенную опасность как для двигателя, так и для обслуживающего персонала.

9.1.3. Способы регулирования частоты вращения электродвигателей постоянного тока

Важной является возможность регулирования частоты вращения электродвигателей постоянного тока. Анализ выражений (9.1), (9.2) для частотных характеристик показывает, что частоту вращения электродвигателей постоянного тока можно регулировать несколькими способами: включением добавочного сопротивления $R_{доб}$ в цепь якоря, изменением магнитного потока Φ и изменением напряжения U , подводимого к двигателю.

Одним из наиболее распространенных является способ регулирования частоты вращения включением в цепь якоря электродвигателя добавочного сопротивления. С увеличением сопротивления в цепи якоря при прочих равных условиях происходит снижение частоты вращения. При этом чем больше сопротивление в цепи якоря, тем меньше частота вращения электродвигателя.

При неизменном напряжении питающей сети и неизменном магнитном потоке в процессе изменения значения сопротивления якорной цепи можно получить семейство частотных характеристик, например для электродвигателя с параллельным возбуждением.

Преимущество рассмотренного способа регулирования заключается в его относительной простоте и возможности полу-

чить плавное изменение частоты вращения в широких пределах (от нуля до номинального значения частоты $n_{\text{ном}}$). К недостаткам этого способа следует отнести то, что здесь имеют место значительные потери мощности в добавочном сопротивлении $R_{\text{доб}}$, увеличивающиеся с уменьшением частоты вращения, а также необходимость использования дополнительной регулирующей аппаратуры. Кроме того, этот способ не позволяет регулировать частоту вращения электродвигателя вверх от ее номинального значения, так как в механическом отношении двигатель не рассчитан на эти скорости.

Изменения частоты вращения электродвигателя постоянного тока можно достигнуть и в результате изменения значения магнитного потока Φ возбуждения. Изменение магнитного потока позволяет регулировать частоту вращения электродвигателя только вверх от номинального ее значения, что является недостатком данного способа регулирования. К недостаткам этого способа следует отнести также относительно небольшой диапазон регулирования вследствие наличия ограничений по механической прочности и коммутации электродвигателя.

Преимуществом данного способа регулирования является его простота. Для двигателей с параллельным возбуждением это достигается изменением сопротивления регулировочного реостата R_p в цепи возбуждения.

У двигателей постоянного тока с последовательным возбуждением изменение магнитного потока достигается шунтированием обмотки возбуждения сопротивлением, имеющим соответствующее значение, либо замыканием накоротко определенного количества витков обмотки возбуждения.

Широкое применение особенно в электроприводах, построенных по системе генератор – двигатель, получил способ регулирования частоты вращения путем изменения напряжения на зажимах якоря двигателя.

Преимуществом этого способа регулирования является широкий диапазон плавного изменения частоты вращения без увеличения потерь мощности. К недостаткам данного способа следует отнести то, что при этом необходим источник регулируемого питающего напряжения, а это приводит к увеличению массы, габаритов и стоимости установки в целом.

9.2. Асинхронные трехфазные электрические двигатели

9.2.1. Устройство трехфазных асинхронных электрических двигателей

Асинхронные электродвигатели предназначены для преобразования электрической энергии переменного тока в механическую энергию. В зависимости от системы переменного тока асинхронные электродвигатели выполняют в виде одно-, двух- и трехфазных конструкций. В технике нашли наибольшее распространение асинхронные трехфазные электродвигатели.

Асинхронный трехфазный электродвигатель состоит из неподвижного статора (рис. 9.4) и вращающегося ротора (рис. 9.5, 9.6). Статор двигателя представляет собой полый цилиндр, собранный из отдельных тонких кольцеобразных листов электротехнической стали, изолированных друг от друга с целью уменьшения потерь мощности в магнитопроводе на вихревые токи. В пазах сердечника статора (см. рис. 9.4) уложена трехфазная обмотка, выполненная из изолированного провода и состоящая из трех отдельных обмоток фаз, оси которых сдвинуты в пространстве друг относительно друга на угол 120° . Обмотки фаз соединены между собой звездой или треугольником в зависимости от величины подводимого напряжения.

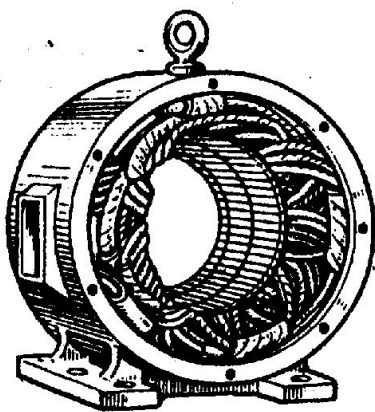


Рис. 9.4. Внешний вид статора трехфазного асинхронного электродвигателя

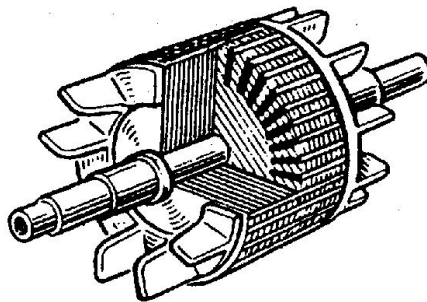


Рис. 9.5. Внешний вид короткозамкнутого ротора

Ротор асинхронного электродвигателя изготавливают в двух исполнениях: короткозамкнутым (см. рис. 9.5) и с контактными кольцами (см. рис. 9.6).

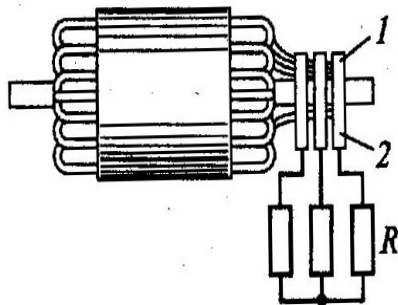


Рис. 9.6. Внешний вид ротора трехфазного асинхронного электродвигателя с контактными кольцами:

1 – контактные кольца; 2 – контактные щетки; R – пусковое сопротивление

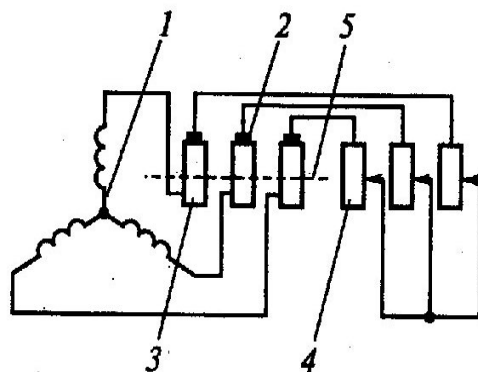


Рис. 9.7. Схема включения реостата в цепь ротора трехфазного асинхронного двигателя с контактными кольцами:

1 – обмотка ротора; 2 – неподвижные контактные щетки; 3 – контактные кольца; 4 – трехфазный реостат; 5 – ось вала двигателя

Короткозамкнутый ротор представляет собой ферромагнитный сердечник в виде цилиндра с пазами, в которые уложена обмотка ротора, состоящая из медных или алюминиевых стержней, соединяемых между собой торцевыми кольцами и образующих цилиндрическую клетку. В большинстве случаев клетку ротора отливают из алюминия или из сплава на его основе. Для уменьшения потерь мощности в магнитопроводе ротор, так же как и статор, собирают из отдельных изолированных друг от друга листов электротехнической стали.

Ротор с контактными кольцами (см. рис. 9.6), называемый также фазным, имеет трехфазную обмотку, выполненную изолированным проводом, которая в конструктивном отношении мало чем отличается от обмотки статора двигателя. В большинстве случаев обмотки ротора соединены звездой (рис. 9.7). Свободные концы обмотки подводятся к контактным кольцам 1 ротора. В процессе работы контактные кольца скользят по неподвижным металлографитовым щеткам 2, обеспечивающим электрическое

соединение обмотки вращающегося ротора с трехфазным неподвижным пусковым реостатом R , подключенным к щеткам. Это позволяет изменять активное сопротивление электрической цепи ротора асинхронного двигателя в процессе его вращения, что необходимо для уменьшения значительного пускового тока, возникающего при пуске, а также для целей регулирования частоты вращения ротора при работе и изменения пускового момента двигателя.

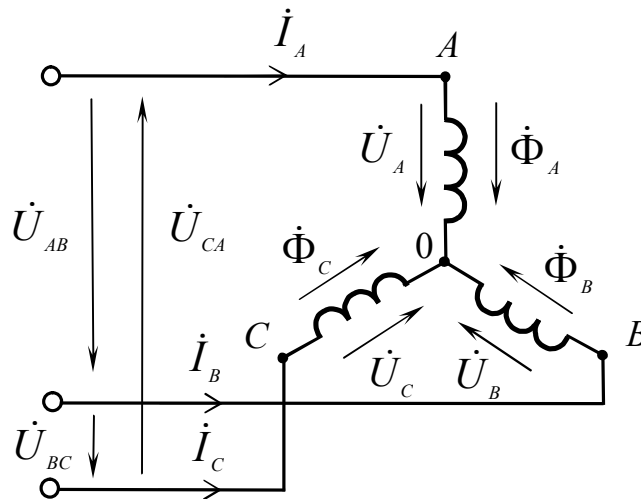


Рис. 9.8. Схема включения обмотки статора трехфазного асинхронного электродвигателя в трехфазную питающую сеть

При подключении трехфазной обмотки статора (рис. 9.8) к трехфазной системе однофазных синусоидальных напряжений, сдвинутых относительно друг друга по фазе во времени на угол $2\pi/3$, в его обмотках возникнет трехфазная система синусоидальных токов, соответственно сдвинутых во времени по фазе на угол $2\pi/3$, которая, в свою очередь, создает трехфазную систему синусоидальных магнитных потоков, также сдвинутых во времени по фазе на угол $2\pi/3$. Выражения для мгновенных значений магнитных потоков, создаваемых фазами A , B и C обмотки статора, с учетом изложенного, представлены в следующем виде при начальной фазе:

$$\Psi_A = 0; \Psi_B = -\frac{2}{3}\pi, \Psi_C = \frac{2}{3}\pi;$$

$$\Phi_A = \Phi_m \sin \omega t;$$

$$\Phi_B = \Phi_m \sin\left(\omega t - \frac{2}{3}\pi\right);$$

$$\Phi_C = \Phi_m \sin\left(\omega t + \frac{2}{3}\pi\right).$$

Можно показать, что при любом промежуточном значении угла поворота ωt , соответственно времени t , вектор результирующего магнитного потока Φ , конец которого, перемещаясь по окружности, занимает на комплексной плоскости промежуточные положения, соответствующие данному ωt , причем в любой момент времени t модуль его оказывается равным $\Phi = \frac{3}{2}\Phi_m$.

Приведенные данные свидетельствуют о том, что создаваемый трехфазной обмоткой статора результирующий магнитный поток

$$\Phi = \frac{3}{2}\Phi_m = \text{const}$$

вращается во времени в межполюсном пространстве асинхронного трехфазного электродвигателя с угловой частотой $\omega = \text{const}$.

9.2.2. Принцип действия трехфазного асинхронного электродвигателя

Результирующий магнитный поток Φ при своем вращении пересекает проводники обмотки ротора и наводит в них ЭДС. Так как обмотка ротора асинхронного двигателя представляет собой замкнутую электрическую цепь, в ней возникает ток, который, взаимодействуя с магнитным потоком статора, создает электромагнитный момент двигателя. Под действием этого момента ротор вращается в сторону вращающегося магнитного поля двигателя, причем частота вращения ротора всегда меньше частоты вращения вращающегося магнитного поля ($n_2 < n_1$). Если ротор будет вращаться с частотой поля, его обмотка не пересечется этим полем и в ней не будет наводиться ЭДС. Следовательно, при отсутствии тока в роторе электромагнитный момент, разви-

ваемый двигателем, равен нулю. При этом двигатель замедляет свой ход до тех пор, пока в роторе не появится ток, необходимый для обеспечения соответствующего момента, при этом двигатель продолжает вращаться при частоте вращения n_2 .

Частота вращения магнитного поля (синхронная частота вращения) находится в строгой зависимости от частоты f_1 подводимого напряжения и числа пар полюсов p двигателя:

$$n_2 = 60 f_1 / p .$$

Из этого следует, что при промышленной частоте питающего напряжения $f_1 = 50$ Гц максимальная частота вращения магнитного поля n_1 оказывается равной 3000 мин при $p = 1$. При увеличении числа пар полюсов частота вращения магнитного поля соответственно уменьшается, а следовательно, снижается и частота вращения ротора двигателя. При $p = 2$ $n_1 = 1500$ мин⁻¹, при $p = 3$ $n_1 = 1000$ мин⁻¹, при $p = 4$ $n_1 = 750$ мин⁻¹ и т. д.

Асинхронный электродвигатель характеризуется номинальными данными, на которые он рассчитан. Основные технические данные двигателя указаны в соответствующих каталогах, а также в паспортах, выполненных в виде специальных табличек, закрепленных на корпусах двигателей.

Асинхронные трехфазные электродвигатели имеют шесть выводов обмотки статора (три начала и три конца обмоток фаз). Начала обмоток каждой из трех фаз маркируются C_1 , C_2 , C_3 , а концы соответственно C_4 , C_5 , C_6 . Подобная конструкция обмотки статора дает возможность соединять обмотки фаз двигателя как треугольником, так и звездой. Благодаря этому каждый трехфазный электродвигатель можно использовать при двух различных по значению напряжениях питающей сети (линейном и фазном), например при напряжениях 380 и 220 В.

9.2.3. Схема замещения ротора трехфазного асинхронного электродвигателя

Одним из важнейших показателей, характеризующих работу асинхронного двигателя, является скольжение ротора s :

$$s = \frac{n_1 - n_2}{n_1}, \quad (9.3)$$

где n_1 – частота вращения магнитного поля, мин^{-1} ;

n_2 – частота вращения ротора электродвигателя, мин^{-1} .

Для большинства типов асинхронных электродвигателей скольжение ротора при номинальной нагрузке составляет $s_{\text{ном}} = 2 - 6 \%$ (в относительных единицах $s = 0,02 - 0,06$), а при работе в режиме холостого хода, т. е. когда электродвигатель работает без нагрузки на валу, – доли процента.

При вращении ротора с частотой вращения поля n_1 его скольжение, как это следует из (9.3), $s = 0$. При частоте вращения ротора $n_2 = 0$, т. е. при неподвижном роторе, скольжение ротора $s = 1$.

Разность частот вращения $(n_1 - n_2) = sn_1$ представляет собой частоту скольжения вращающегося поля статора двигателя относительно поверхности его ротора. Нетрудно видеть, что от частоты скольжения, а также от абсолютного значения магнитного потока, характеризующего вращающееся магнитное поле, зависит и значение ЭДС, наводимой в обмотке ротора, а следовательно, ток ротора и его частота при данном скольжении s :

$$f_{2s} = \frac{pn_1s}{60} = sf_1,$$

где f_1 – частота тока неподвижного ротора.

При увеличении нагрузки на валу электродвигателя, обусловленной возрастанием момента сопротивления, частота вращения ротора уменьшается, а скольжение возрастает. Это вызывает увеличение ЭДС ротора E_{2s} , а следовательно, токов ротора и статора асинхронного двигателя. При этом мощность P_1 , потребляемая из сети, также возрастает.

При неподвижном роторе вращающееся магнитное поле в обмотках статора и ротора асинхронного электродвигателя будет наводить переменные ЭДС, действующие значения которых определяют по формулам, сходным с формулами, полученным для ЭДС трансформатора:

$$E_1 = 4,44k_1f_1w_1\Phi_m;$$

$$E_2 = 4,44k_2f_2w_2 \Phi_m,$$

где E_1 – фазное значение ЭДС, наводимой в обмотке статора;

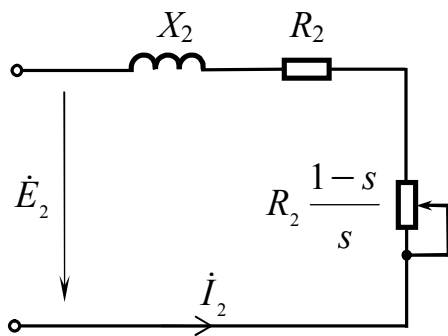
E_2 – фазное значение ЭДС, наводимой в обмотке ротора при неподвижном его состоянии ($s = 1, n_2 = 0$);

w_1, w_2 – число витков в фазе статора и ротора;

Φ_m – амплитудное значение магнитного потока фазы асинхронного двигателя;

k_1, k_2 – обмоточные коэффициенты статора и ротора асинхронного двигателя.

В отличие от трансформатора вследствие конструктивных особенностей асинхронного двигателя вращающийся магнитный поток не будет одновременно сцеплен со всеми витками обмоток статора и ротора, что учитывается обмоточными коэффициентами k_1 и k_2 , меньшими единицы (у трансформатора $k_1 = k_2 = 1$).



В [3] показано, что ток ротора вращающегося двигателя можно определить через ЭДС E_2 неподвижного ротора. Сопротивление f_1 и является постоянным, а активное сопротивление электрической цепи ротора при этом зависит от скольжения и находится из соотношения

$$\frac{R_2}{s} = \frac{R_2(1-s)}{s} + R_2.$$

Рис. 9.9. Схема замещения электрической цепи неподвижного ротора

С учетом этого для тока ротора схема замещения вращающегося ротора асинхронного электродвигателя может быть приведена к схеме замещения неподвижного ротора, представленной на рис. 9.9.

9.2.4. Рабочие характеристики трехфазного асинхронного электродвигателя

Зависимости между M (электромагнитным моментом, развиваемым двигателем), потребляемой мощностью P_1 , коэффициентом мощности $\cos \varphi_1$, КПД η , скольжением ротора s и тока статора I_1 , потребляемого двигателем из сети, от полезной

мощности, т. е. мощности на валу двигателя P_2 (рис. 9.10), являются рабочими характеристиками асинхронного электродвигателя (при $U_1 = \text{const}$ и $f_1 = \text{const}$). При этом зависимость $M(P_2)$ определяют формулой $M = 9550P_2/n_2$, из которой следует, что эта зависимость представляет собой несколько искривленную прямую, проходящую через начало координат, так как с изменением нагрузки на валу частота вращения ротора двигателя n_2 несколько уменьшается.

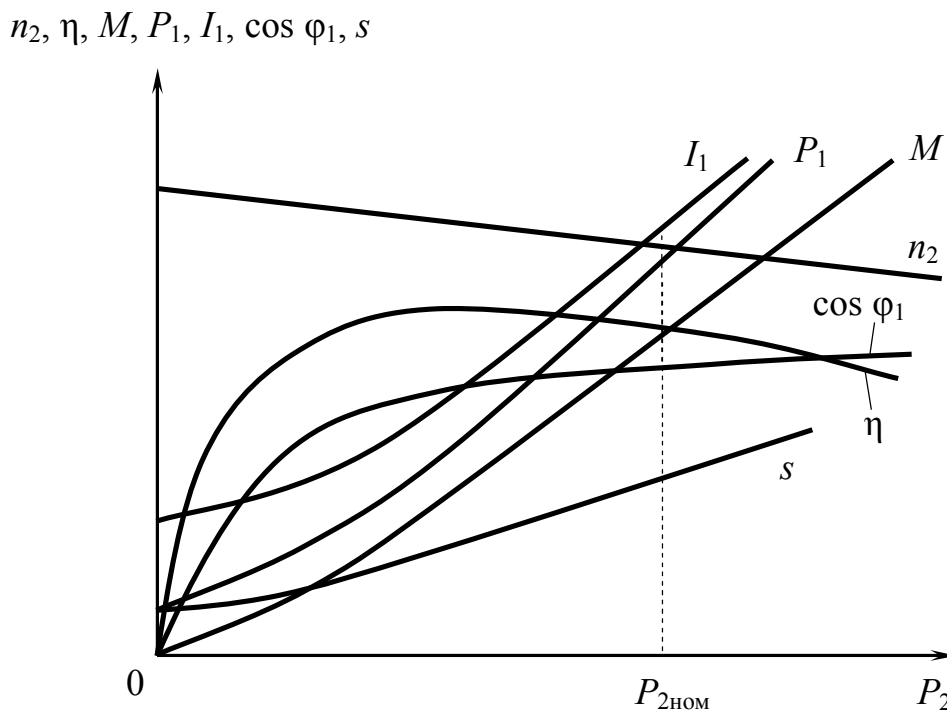


Рис. 9.10. Рабочие характеристики асинхронного трехфазного электродвигателя

Характер зависимости $\cos \varphi_1(P_2)$, т.е. зависимости коэффициента мощности асинхронного двигателя от мощности на валу, определяют выражением

$$\cos \varphi_1 = P_1 / \sqrt{3}U_1I_1.$$

Значение коэффициента мощности для нормальных асинхронных двигателей средней мощности при номинальной нагрузке составляет $\cos \varphi_{1\text{ном}} = 0,83\text{--}0,89$. С уменьшением нагрузки на валу двигателя коэффициент мощности снижается и доходит до значений, равных $0,2\text{--}0,3$ при холостом ходе. В этом ре-

жиме полезная мощность на валу P_2 равна нулю, однако при этом двигатель потребляет мощность P_1 из сети, поэтому коэффициент мощности не равен нулю. С увеличением нагрузки сверх номинальной наблюдается некоторое снижение значения коэффициента мощности за счет увеличения падения напряжения на индуктивной составляющей сопротивления обмотки статора асинхронного двигателя. Характер изменения коэффициента мощности от нагрузки асинхронного двигателя имеет примерно такой же вид и изменяется по тем же причинам, что и у трансформатора.

Зависимость КПД асинхронного двигателя от нагрузки $\eta(P_2)$ описывают формулой

$$\eta = P_2/P_1 = P_2/(P_2 + P_{\Sigma}),$$

где P_1 – активная мощность, потребляемая двигателем из питающей сети;

P_{Σ} – суммарные потери мощности в двигателе, равные сумме потерь мощности в магнитопроводе, электрических потерь мощности в обмотках статора, электрических потерь мощности в обмотке ротора, механических потерь и добавочных потерь мощности.

При отсутствии нагрузки $P_2 = 0$ КПД электродвигателя при этом также равен нулю. С увеличением нагрузки КПД двигателя растет и принимает наибольшее значение при условии, что постоянные потери мощности в электродвигателе ($P_m + P_{\text{мех}}$) оказываются равными переменным потерям мощности ($P_{\text{эл1}} + P_{\text{эл2}}$) в нем. При дальнейшем росте нагрузки КПД электродвигателя, так же как и у трансформатора, снижается. Ток с увеличением мощности P_2 на валу, т. е. с увеличением нагрузки двигателя, вызываемой возрастанием момента сопротивления исполнительного механизма, частота вращения n_2 ротора уменьшается, а его скольжение при этом возрастает, вызывая увеличение ЭДС E_2 в обмотках ротора, а следовательно, возрастание токов ротора и статора. При неизменном магнитном потоке двигателя это приводит к увеличению момента, развиваемого двигателем. Таким образом, с увеличением нагрузки на валу равновесие между моментом, развиваемым двигателем, и моментом сопротивления наступает при снижении частоты вращения. При возрастании момента нагрузки на валу электродвигателя происходит снижение частоты

ты вращения ротора, т. е. частоты вращения n_2 асинхронного двигателя.

Ток статора при отсутствии нагрузки равен току холостого хода ($I_1 = I_0$). При увеличении мощности на валу электродвигателя возрастает и ток I_1 , потребляемый двигателем из питающей сети. Увеличение тока происходит приблизительно по линейному закону. Однако при значительном возрастании мощности на валу линейность нарушается и ток начинает возрастать интенсивнее, чем мощность, так как коэффициент мощности двигателя при этом снижается, а электрические потери мощности в обмотках двигателя при больших нагрузках значительно возрастают. Снижение $\cos \varphi_1$ и увеличение потерь мощности в двигателе компенсируются увеличением тока нагрузки вследствие возрастания мощности. Этим же объясняется и характер изменения потребляемой из сети мощности P_1 .

9.3. Синхронные трехфазные электрические двигатели

9.3.1. Устройство и принцип действия трехфазных синхронных электродвигателей

Синхронные машины, так же как и другие электрические машины, обратимы, т. е. могут работать как в режиме генератора, так и в режиме двигателя, поэтому конструкция синхронного электродвигателя практически ничем не отличается от конструкции синхронного генератора, представленной на рис. 9.11.

Основными частями синхронной машины являются неподвижный статор 1 и вращающийся ротор 3 (рис. 9.11). В пазах 2 статора, представляющего собой цилиндрический магнитопровод, набранный из отдельных изолированных листов электротехнической стали, размещаются проводники 4 обмотки статора. В конструктивном отношении статор и обмотка статора синхронной машины принципиально не отличаются от конструкции статора и обмотки статора асинхронной машины. Вращающаяся часть синхронной машины – ротор 3 – выполняется с электромагнитами, обмотки которых питаются постоянным током через систему контактных колец 5 и создают необходимое для работы машины вращающееся магнитное поле.

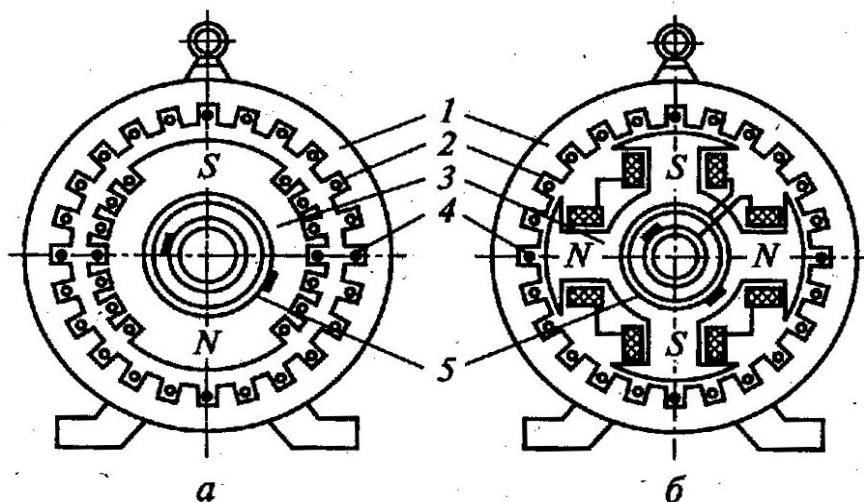


Рис. 9.11. Устройство трехфазных синхронных генераторов:
а – с неявно выраженными полюсами;
б – с явно выраженными полюсами

Эту часть синхронной машины называют индуктором. В процессе работы синхронной машины в обмотке статора наводится ЭДС, поэтому ее статор называют якорем. Питание обмотки индуктора синхронной машины осуществляется от независимого источника постоянного тока или от сети переменного тока через специальные выпрямительные устройства. С этой целью для мощных синхронных машин используют относительно небольшие генераторы постоянного тока, так называемые возбуждители, приводимые во вращение от вала синхронной машины. При использовании в качестве электродвигателя синхронная машина потребляет электрическую энергию из питающей сети и преобразует ее в механическую. По сравнению с асинхронными синхронные электродвигатели имеют ряд существенных преимуществ, особенно при незначительных частотах вращения и больших мощностях машин.

Синхронные электродвигатели могут быть выполнены одно-, двух- и трехфазными. Наиболее распространены трехфазные синхронные двигатели, работа которых основана на взаимодействии поля постоянных магнитов (электромагнитов) ротора с вращающимся магнитным полем, создаваемым обмоткой якоря (статора). В большинстве случаев синхронные элек-

тродвигатели выполняют явнополюсными (их относят к категории тихоходных).

Частота вращения синхронных электродвигателей в отличие от асинхронных строго постоянна и зависит только от частоты f питающего напряжения и числа пар полюсов p двигателя:

$$n = 60f/p.$$

При включении обмотки статора синхронного электродвигателя в трехфазную сеть, так же как в асинхронном двигателе, возникает вращающееся магнитное поле, частота вращения которого определяется приведенным выражением.

9.3.2. Способы пуска в ход трехфазных синхронных электродвигателей

В практике наиболее широкое распространение получили способы пуска в ход синхронного двигателя с помощью вспомогательного электродвигателя и асинхронного пуска синхронного электродвигателя.

При пуске по первому способу ротор синхронного двигателя с возбужденными полюсами с помощью другого, предназначенного для этого вспомогательного электродвигателя, доводится до частоты вращения ротора, равной или близкой к синхронной частоте вращения. При этом разноименные полюса ротора и поля статора, неподвижные друг относительно друга в пространстве, притягиваются через воздушный зазор машины. Ротор входит в синхронизм и далее вращается самостоятельно с частотой вращающегося магнитного поля $\omega = \text{const}$. Вспомогательный электродвигатель оказывается при этом ненужным и его следует отключить от сети. В качестве вспомогательного двигателя обычно используют электродвигатель постоянного тока. Для этого также можно использовать и асинхронный электродвигатель с соответствующим числом пар полюсов.

Недостатком рассмотренного способа пуска является относительная сложность процесса пуска и необходимость применения вспомогательного электродвигателя, который после окончания пуска оказывает некоторое тормозное воздействие на

синхронный двигатель, снижая КПД установки. Учитывая это, в ряде случаев после окончания пуска вспомогательный двигатель с помощью специального устройства отключают от вала синхронного электродвигателя. В отдельных случаях в качестве вспомогательного двигателя при пуске используют возбудитель синхронного двигателя.

В современных условиях чаще применяют так называемый асинхронный пуск синхронного электродвигателя, лишенный указанных недостатков. Сущность этого способа заключается в том, что в полюсных наконечниках ротора синхронного двигателя укладывается дополнительная короткозамкнутая обмотка ротора, выполняющая ту же роль, что и обмотка ротора асинхронного электродвигателя. При включении обмотки статора синхронного двигателя в трехфазную сеть в магнитопроводе и воздушном зазоре машины создается вращающееся магнитное поле. Это поле наводит в короткозамкнутой обмотке неподвижного ротора переменный ток, который, взаимодействуя с вращающимся магнитным полем, создает вращающий момент, приводящий ротор во вращение в направлении вращающегося магнитного поля.

Происходит нарастание частоты вращения ротора синхронного двигателя, которая после окончания разгона достигает значения, близкого к синхронной частоте вращения, так как процесс пуска синхронного двигателя происходит в режиме холостого хода, без нагрузки. Затем включается питание обмотки ротора синхронного электродвигателя. Полюса ротора возбуждаются и в результате взаимодействия магнитных полей статора и ротора синхронный электродвигатель входит в синхронизм. После окончания пуска относительная скорость перемещения проводников обмотки ротора в магнитном поле оказывается равной нулю. Ток в этой обмотке уменьшается до нуля, и при дальнейшей работе синхронного двигателя с синхронной частотой вращения короткозамкнутая обмотка ротора не оказывает воздействия на работу синхронного двигателя, так как момент вращения, создаваемый с ее помощью, также равен нулю.

При появлении толчков, возможных при сбросе и нарастании нагрузки на валу синхронного двигателя, когда происходит кратковременное скачкообразное изменение частоты вращения

ротора в результате изменения угла нагрузки θ , в короткозамкнутой обмотке ротора возникает ток, который, взаимодействуя с полем статора, будет создавать момент, препятствующий изменению частоты вращения. В этом случае вспомогательная короткозамкнутая обмотка ротора выполняет роль своеобразного демпфера, сглаживающего толчки нагрузки.

Преимуществом рассматриваемого способа пуска синхронного двигателя является его простота. В этом случае пуск синхронного двигателя производится простым включением в питающую сеть. К недостаткам этого способа следует отнести то, что при пуске в обмотке статора достаточно мощного синхронного двигателя возникают значительные пусковые токи, которые могут вызвать заметное снижение напряжения в питающей сети, что неблагоприятно отражается на работе других электрических машин и потребителей электроэнергии, питающихся от той же сети электроснабжения.

Для уменьшения пускового тока пуск синхронных электродвигателей производят при пониженном напряжении. С этой целью при пуске используют автотрансформаторы или включают реакторы последовательно с обмоткой статора. При пуске синхронных двигателей малой мощности, а также при небольших напряжениях иногда осуществляют пуск с переключением обмотки статора со звезды на треугольник.

В [3] показано, что недовозбужденный синхронный двигатель при работе в этих условиях потребляет из питающей сети отстающий по фазе от напряжения ток, в то время как перевозбужденный синхронный двигатель при работе в этих условиях потребляет опережающий ток.

Свойство синхронных электродвигателей потреблять из питающей сети опережающий ток особенно ценно для промышленных установок, так как оно позволяет одновременно с использованием синхронной машины в качестве приводного двигателя использовать ее и для повышения коэффициента мощности ($\cos \varphi$) установки без применения статических конденсаторов.

При необходимости компенсации реактивных индуктивных токов питающей сети в ряде случаев мощные синхронные электродвигатели включают без нагрузки на валу, используя их

только в качестве компенсаторов реактивной мощности. Для этой цели промышленность выпускает специальные синхронные электродвигатели с облегченным валом, работающие вхолостую и предназначенные для генерирования емкостной реактивной мощности. Синхронные электродвигатели подобной конструкции называют синхронными компенсаторами или синхронными конденсаторами.

Синхронные электродвигатели по сравнению с другими электродвигателями имеют существенные преимущества, так как сохраняют постоянство числа оборотов с изменением нагрузки, имеют высокий коэффициент мощности и позволяют повышать $\cos \varphi$ потребителей электроэнергии путем изменения тока возбуждения машины. Вместе с тем синхронные электродвигатели оказываются более устойчивыми к колебаниям напряжения питающей сети, так как момент, развиваемый ими, пропорционален напряжению U , в то время как момент асинхронного электродвигателя пропорционален квадрату напряжения U^2 питающей сети.

К недостаткам синхронных электродвигателей следует отнести то, что они характеризуются относительно сложным процессом пуска, способны выпадать из синхронизма при перегрузках, затрудняют возможность регулирования частоты вращения исполнительного механизма и связаны с необходимостью применения источников постоянного и переменного токов одновременно.

Благодаря отмеченным особенностям синхронных электродвигателей последние нашли широкое применение для привода механизмов с редкими пусками, когда необходимо или допустимо иметь постоянную частоту вращения.

Глава 10

НЕЛИНЕЙНЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ

Нелинейной называют электрическую цепь, которая содержит хотя бы один нелинейный элемент. Нелинейных элементов, как и линейных, в электротехнике три: резистор R , индуктивность L и емкость C . У нелинейного резистора нелинейна вольт-амперная характеристика $U = f(I)$. Примерами такого элемента служат диоды и транзисторы. У нелинейной емкости нелинейна вольт-фарадная характеристика $U = f(C)$. Пример нелинейной емкости – варикап, представляющий собой диод с очень тонким p - n переходом. Если в любую катушку индуктивности вставить сердечник из магнитомягкого материала, то такая индуктивность будет иметь нелинейную ампер-веберную характеристику $I = f(\psi)$.

10.1. Аппроксимация нелинейных характеристик

Для анализа и расчета нелинейных цепей необходимо задать вольт-амперные или иные характеристики нелинейных элементов в аналитической форме. Реальные характеристики обычно имеют сложный нелинейный вид. Современная математика позволяет точно описать любую функцию, в том числе и характеристику нелинейного элемента. Однако формулы, получаемые при этом, не представляется возможным использовать в расчетах ввиду сложности этих аналитических выражений. В электротехнике широкое распространение получили способы представления характеристик нелинейных элементов относительно простыми функциями, лишь приближенно отображающими истинные характеристики. Замена истинной характеристики приближенно представляющей ее функцией называется аппроксимацией характеристики.

Выбор оптимальной аппроксимации зависит от вида нелинейной характеристики, а также от режима работы нелинейного элемента. Одним из наиболее распространенных и широко используемых способов аппроксимации является аппроксимация

степенным полиномом. Пусть нелинейная функция $f(x)$, изображенная на рис. 10.1, представлена следующим полиномом:

$$\bar{y} = \bar{f}(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots, \quad (10.1)$$

где $\bar{y} = \bar{f}(x)$ – аппроксимирующая функция;
 $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots$ – коэффициенты полинома.

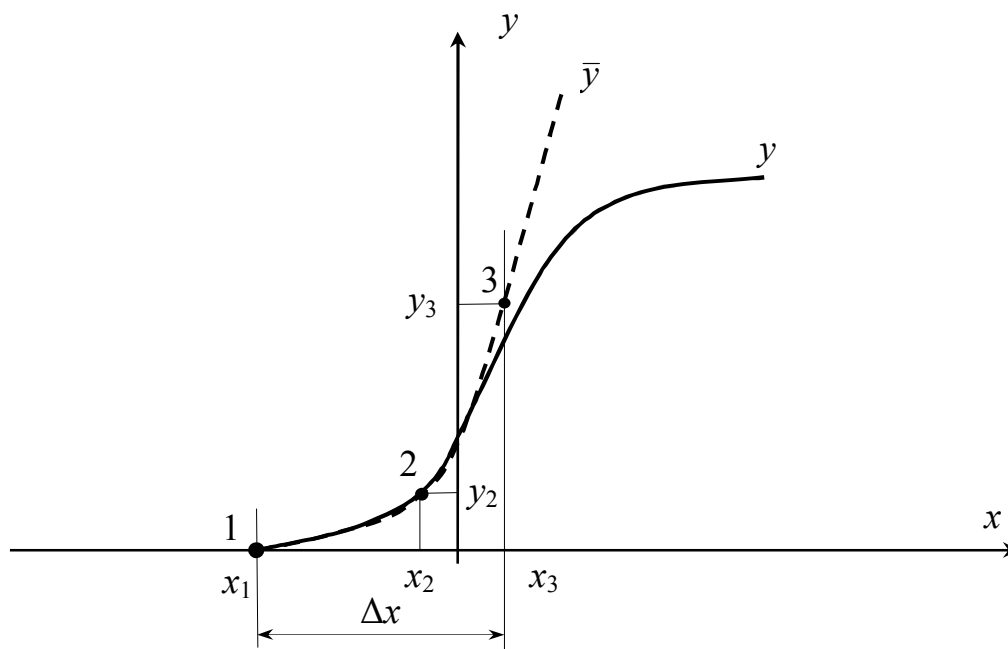


Рис. 10.1. Аппроксимация степенным полиномом

Этот вид аппроксимации используют для описания небольших участков характеристики. Диапазон аргумента функции Δx небольшой. Исходя из требуемой точности, выбирают высшую степень полинома – чем она выше, тем больше точность описания. Ограничимся второй степенью:

$$\bar{y} = a_0 + a_1x + a_2x^2.$$

Затем на характеристике выбирают $n + 1$ точку, где n – высшая степень полинома аппроксимирующей функции, т. е. в нашем случае: $2 + 1 = 3$. Две точки – на краях диапазона (рис. 10.1), а остальные – на участке наибольшей крутизны функции $y = f(x)$. Затем для каждой точки записывают уравнения:

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1 = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 \\ y_2 = a_0 + a_1 x_2 + a_2 x_2^2 \\ y_3 = a_0 + a_1 x_3 + a_2 x_3^2 \end{array} \right\},$$

где $x_1, x_2, x_3; y_1, y_2, y_3$ – координаты точек;
 a_0, a_1, a_2 – коэффициенты полинома.

Решая эту систему уравнений, находят числовые значения коэффициентов полинома и записывают аппроксимирующую функцию. На рис. 10.1 эта аппроксимирующая функция показана пунктиром. Этим способом широко пользуются при описании начальных участков вольт-амперных характеристик диодов и транзисторов.

При необходимости аппроксимировать характеристику нелинейного элемента $y = f(x)$ в широком динамическом диапазоне используют полигональную аппроксимацию (или аппроксимацию кусочно-линейную):

$$\bar{y} = \begin{cases} 0, & x \leq x_1 \\ S(x - x_1), & x_1 < x < x_2 \\ y_2, & x \geq x_2 \end{cases}, \quad (10.2)$$

где S – крутизна функции \bar{y} на интервале $x_1 < x < x_2$.

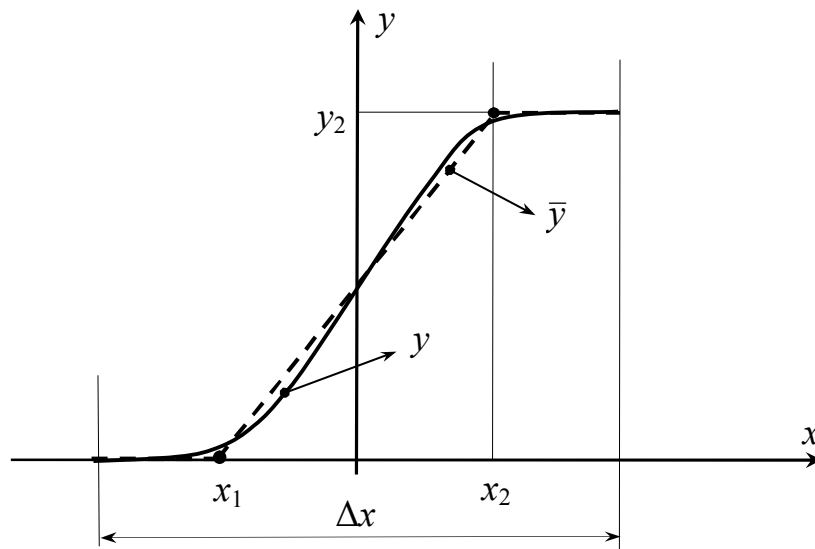


Рис. 10.2. Полигональная аппроксимация

Несмотря на кажущуюся, на первый взгляд, «грубость» аппроксимации, при использовании в задачах анализа цепей погрешности не превышают 5–10 %, что вполне допустимо для инженерных расчетов.

Для повышения точности аппроксимации при больших динамических диапазонах Δx используют кусочно-параболическую аппроксимацию, представляющую собой комбинацию из двух ранее рассмотренных методов, и другие способы. Все эти способы аппроксимации применимы к соответствующим характеристикам не только активных (диодов, транзисторов), но реактивных нелинейных элементов.

10.2. Воздействие гармонических колебаний на нелинейные элементы

Рассмотрим действие гармонического колебания на нелинейный элемент при рассмотренных выше двух способах аппроксимации его характеристики. Пусть характеристика нелинейного элемента аппроксимируется степенным полиномом (10.1). Ограничимся третьей высшей степенью этого полинома:

$$\bar{y} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots \quad (10.3)$$

Входное колебание для нелинейного элемента:

$$x(t) = x = x_0 \cos(\omega_0 t).$$

Подставляя эту формулу в (10.3), получим отклик нелинейного элемента (колебание на его выходе):

$$\bar{y}(t) = a_0 + a_1 x_0 \cos(\omega_0 t) + a_2 x_0^2 \cos^2(\omega_0 t) + a_3 x_0^3 \cos^3(\omega_0 t) + \dots \quad (10.4)$$

С помощью тригонометрических соотношений

$$\cos^2 x = 1/2 + 1/2 \cos 2x; \cos^3 x = 3/4 \cos x + 1/4 \cos 3x \quad (10.5)$$

выражение (10.4) приведем к виду

$$\begin{aligned} \bar{y}(t) = & a_0 + a_1 x_0 \cos(\omega_0 t) + a_2 \frac{x_0^2}{2} [1 + \cos(2\omega_0 t)] + \\ & + x_0^3 a_3 [3 \cos(\omega_0 t) + \cos(3\omega_0 t)] / 4 + \dots \end{aligned}$$

Как видно из этого выражения, при действии на входе гармонического колебания с частотой ω_0 на выходе будут следующие спектральные составляющие:

$a_0 + \frac{a_2 x_0^2}{2} + \dots$ – постоянная составляющая;

$a_1 x_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{3}{4} a_3 x_0^3 \cos(\omega_0 t) + \dots$ – первая гармоника;

$\frac{a_2 x_0^2}{2} + \dots$ – вторая гармоника;

$\frac{x_0^3}{4} a_3 \cos(3\omega_0 t) + \dots$ – третья гармоника.

Полученный выше результат представлен на рис. 10.3 амплитудно-частотными характеристиками.

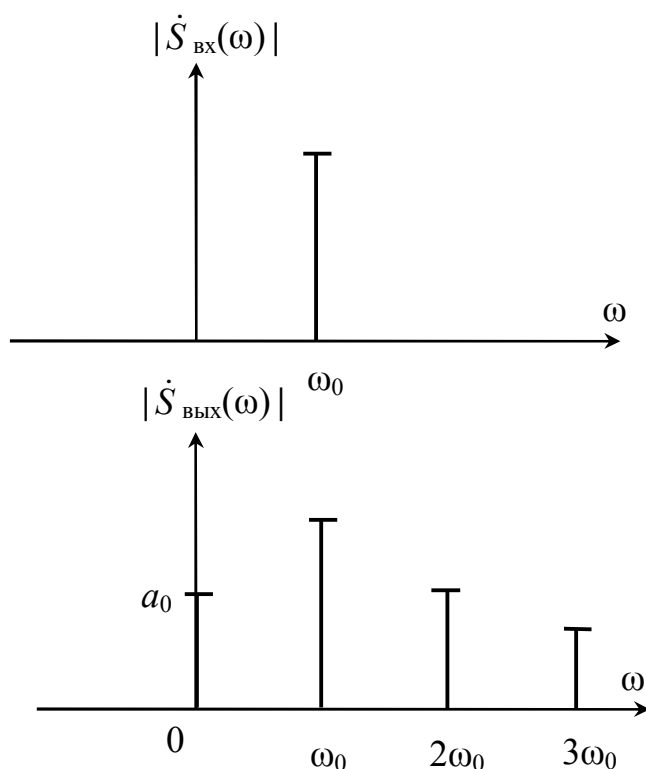


Рис. 10.3. Спектр на входе и выходе нелинейного элемента

Таким образом, спектр отклика при действии на нелинейный элемент одного гармонического колебания обогащается за счет постоянной составляющей a_0 и высших гармоник – второй и

третьей. При повышении степени аппроксимирующей функции (10.1) число высших гармоник будет увеличиваться, причем номер высшей гармоники будет равен высшей степени полинома.

При действии двух гармонических колебаний

$$x_1(t) = x_1 \cos(\omega_1 t) \text{ и } x_2(t) = x_2 \cos(\omega_2 t)$$

на нелинейный элемент при полиномиальной аппроксимации с третьей высшей степенью полинома получим:

$$\begin{aligned} \bar{y}(t) = & a_0 + a_1 x_1 \cos(\omega_1 t) + a_1 x_2 \cos(\omega_2 t) + a_2 x_1^2 \cos^2(\omega_1 t) + \\ & + 2a_2 x_1 x_2 \cos(\omega_1 t) \cos(\omega_2 t) + a_2 x_2^2 \cos^2(\omega_2 t) + a_3 x_1^3 \cos^3(\omega_1 t) + \\ & + 3a_3 x_1^2 x_2 \cos^2(\omega_1 t) \cdot \cos(\omega_2 t) + 3a_3 x_1 x_2^2 \cos(\omega_1 t) \cdot \cos^2(\omega_2 t) + \\ & + a_3 x_2^3 \cos^3(\omega_2 t) + \dots \end{aligned}$$

Используя тригонометрические соотношения (10.5), а также

$$\cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)],$$

нетрудно увидеть, что в отклике нелинейного элемента будут присутствовать спектральные составляющие на частотах:

- 1) $\omega = 0$ – постоянная составляющая;
- 2) $\omega = \omega_1, 2\omega_1, 3\omega_1, \omega_2, 2\omega_2, 3\omega_2$ – гармоники входного колебания;
- 3) $\omega = (\omega_1 + \omega_2), (\omega_1 - \omega_2), (2\omega_1 + \omega_2), (2\omega_1 - \omega_2), (\omega_1 + 2\omega_2), (\omega_1 - 2\omega_2)$ – комбинационные частоты.

Таким образом, при действии двух гармонических колебаний на нелинейный элемент спектр отклика обогащается за счет постоянной составляющей, высших гармоник входных частот, а также комбинационных частот, образованных суммами и разностями основных (входных) частот и их гармоник.

При полигональной аппроксимации и действии одного гармонического колебания $U(t)$ отклик имеет форму периодических импульсов с тем же периодом колебаний, что и у входного напряжения (рис. 10.4). При этом периодическую последовательность можно разложить в ряд Фурье. В результате получим, что отклик будет иметь бесконечно большое число гармоник.

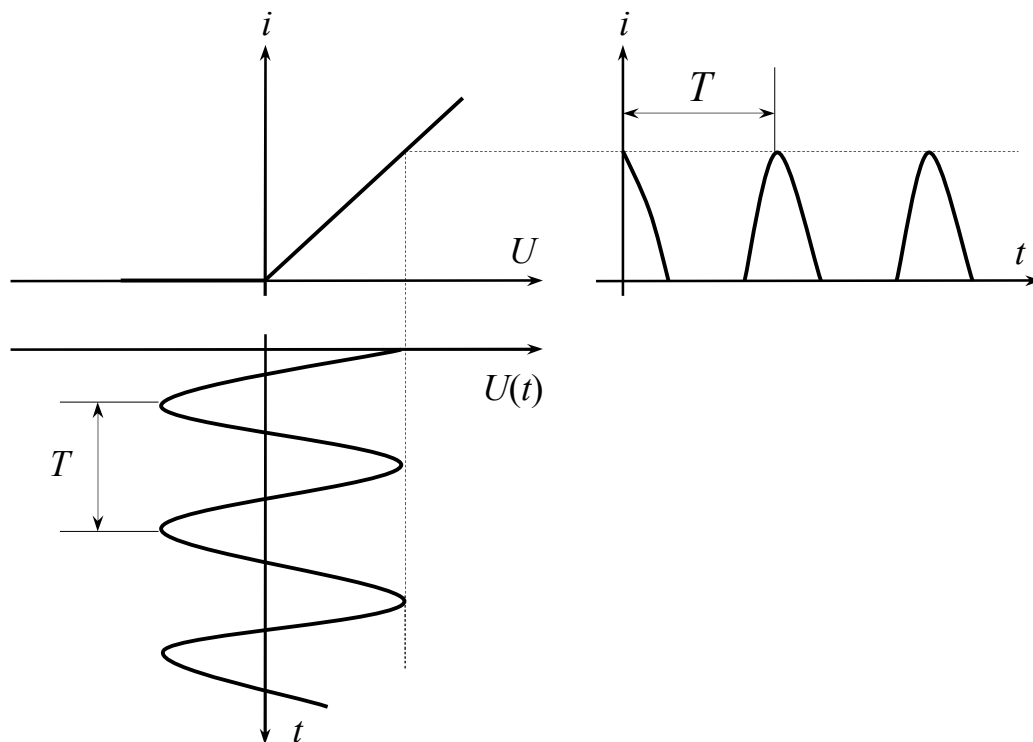


Рис. 10.4. Отклик при полигональной аппроксимации

При действии на нелинейный элемент двух и более колебаний в отклике появится также бесконечно большое число комбинационных частот.

10.3. Практическое использование

Преобразование спектра в нелинейном элементе широко используется при решении различных практических задач. В общем виде принцип преобразования спектра виден из рис. 10.5.

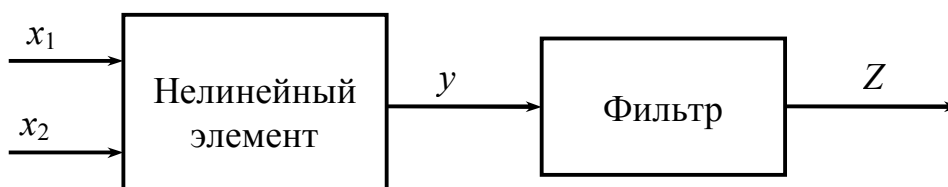


Рис. 10.5. Преобразование спектра в нелинейном элементе

Одно или два гармонических колебания подают на нелинейный элемент. Отклик будет иметь обогащенный спектр, как показано в параграфе 10.2. С помощью фильтра из этого спектра выделяют нужные спектральные составляющие. Так, например, при работе выпрямителей (преобразователей переменных напряжений и токов в постоянные) выделяют фильтром постоянную составляющую отклика. Преобразование спектра в нелинейном элементе широко используют в радиоэлектронике при реализации таких функциональных элементов, как нелинейный резонансный усилитель, умножитель частоты, детектор, модулятор, преобразователь и смеситель частот, автогенератор и другие. В электротехнических цепях в качестве нелинейных элементов используют диоды, которые можно рассматривать как некоторое активное сопротивление, величина которого зависит от направления тока; триоды, которые можно рассматривать как нелинейное управляемое сопротивление; катушки индуктивности с сердечником из ферромагнитных материалов; дроссели и магнитные усилители.

Расчет цепей с нелинейными элементами в общем виде сводится к решению системы нелинейных алгебраических уравнений, если характеристики элементов заданы аналитическими уравнениями. Общего метода точного решения таких систем нет, однако в ряде случаев возможно использование ряда аналитических приемов, позволяющих достаточно просто получить нужный результат.

Глава 11

ВЫБОР ЭЛЕКТРОДВИГАТЕЛЕЙ И ПРОВОДОВ

11.1. Выбор электродвигателей

11.1.1. Основные сведения об электроприводе и режимах работы электродвигателей

Для приведения в движение производственных машин и механизмов используют электропривод, состоящий из электродвигателя, передаточного устройства и систем преобразования, управления и автоматизации. В некоторых случаях передаточные устройства и преобразователи (тока, частоты и другие) могут отсутствовать.

Характер движения электропривода описывает уравнение моментов:

$$M = M_c + M_d, \quad (11.1)$$

где M – вращающий момент двигателя;
 M_c – статический момент сопротивления механизма;
 M_d – динамический момент.

Динамический момент определяется как

$$M_d = J \frac{d\omega}{dt},$$

где J – момент инерции вращающихся масс;

$\frac{d\omega}{dt}$ – угловое ускорение.

В установившемся режиме $M = M_c$. Установившееся значение угловой скорости ω или частоты вращения n у двигателей (кроме синхронных) зависит от момента сопротивления механизма (нагрузки). Механические характеристики $\omega(M)$ или $n(M)$ электродвигателей приведены на рис. 11.1.

Механизмы создают моменты сопротивления M_c , которые в свою очередь зависят от ω или n .

Характеристики $\omega(M_c)$ или $n(M_c)$ наиболее распространенных механизмов представлены на рис. 11.2.

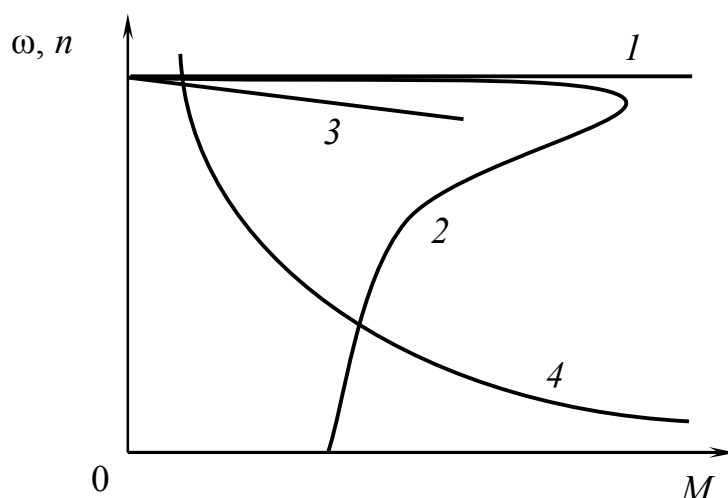


Рис. 11.1. Механические характеристики электродвигателей:
1 — синхронного; 2 — асинхронного; 3 и 4 — постоянного тока параллельного и последовательного возбуждения соответственно

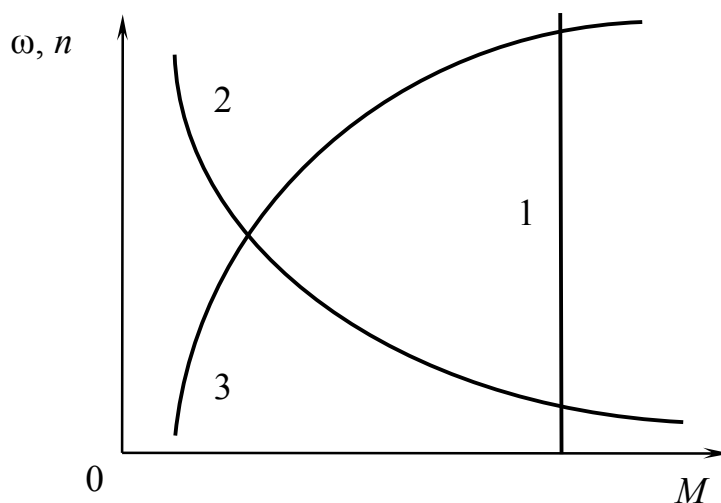


Рис. 11.2. Характеристики моментов сопротивления механизмов:
1 — грузоподъемные и транспортные, поршневые насосы, строгальные станки ($M_c = \text{const}$); 2 — некоторые металлорежущие станки и моталки прокатных станов ($M_c \omega = \text{const}$); 3 — вентиляторы, центробежные насосы, компрессоры и центрифуги

Определение угловой скорости или частоты вращения и момента M в установившемся режиме производится графическим путем, как показано на рис. 11.3. Точка пересечения характеристики рабочего механизма (кривая 1) с характеристикой электродвигателя (кривая 2) соответствует значениям ω (или n) и M .

При работе двигателя в нем происходит постоянное выделение теплоты, что приводит к его нагреву. Превышение температуры двигателя над температурой окружающей среды описывается уравнением

$$\vartheta = \frac{Q}{A} \left(1 - e^{-\frac{t}{T}} \right) + \vartheta_0 e^{-\frac{t}{T}}, \quad (11.2)$$

где Q – количество теплоты, выделяемое в единицу времени;

A – теплоотдача окружающей среды в единицу времени;

T – постоянная времени;

ϑ_0 – превышение температуры

двигателя над температурой окружающей среды в момент включения двигателя при $t = 0$.

В установившемся тепловом режиме, когда количество теплоты, выделяемое в двигателе, и теплоты, рассеиваемой в окружающую среду, становятся одинаковыми (т. е. теоретически при $t = \infty$, а практически при $t \approx 4T$), превышение температуры достигает максимального значения $\vartheta = Q / A$. С учетом последнего

$$\vartheta = \vartheta_{\infty} - (\vartheta_{\infty} - \vartheta_0) e^{-\frac{t}{T}}. \quad (11.3)$$

Установившееся значение превышения температуры двигателя зависит от мощности P_2 на его валу.

При отключении электродвигателя $Q = 0$ и с учетом (11.2)

$\vartheta = \vartheta_{\text{откл}} e^{-\frac{t}{T}}$, где $\vartheta_{\text{откл}}$ – превышение температуры в момент отключения, т. е. превышение температуры двигателя уменьшается по экспоненциальному закону.

В соответствии с характером работы производственных механизмов в условиях эксплуатации различают следующие основные режимы работы двигателя: продолжительный, кратковременный и повторно-кратковременный.

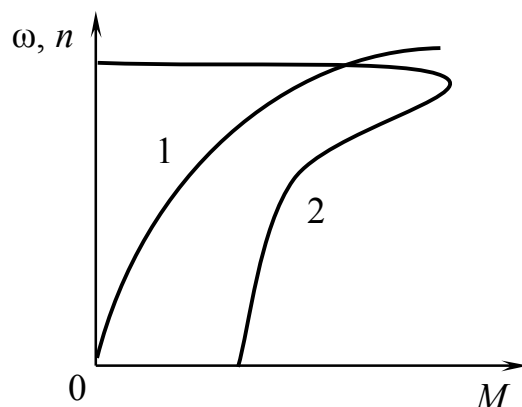


Рис. 11.3. К определению угловой скорости или частоты вращения:

1 – характеристика рабочего механизма; 2 – характеристика электродвигателя

Продолжительный режим – режим, в котором электродвигатель может работать длительное время, при этом установившееся значение превышения температуры двигателя ϑ_{∞} над температурой окружающей среды не превышает установленного значения. Такой режим работы характерен для двигателей вентиляторов, насосов, компрессоров, транспортеров, мощных металлорежущих станков и др.

Кратковременный режим – режим, при котором превышение температуры электрического двигателя достигает предельно допустимого значения для данного класса изоляции, но не достигает установившегося значения. В этом режиме двигатель работает в течение сравнительно небольшого периода времени, а перерыв в работе велик, и двигатель успевает охладиться до температуры окружающей среды. В кратковременном режиме работают двигатели затворов шлюзов, подъемных механизмов разводных мостов и т. д.

Повторно-кратковременный режим – режим, при котором периоды работы электродвигателя под нагрузкой чередуются с паузами, когда двигатель отключается. При этом периоды работы и паузы не настолько длительны, чтобы температура достигла установившегося значения. Такой режим характерен для двигателей подъемно-транспортных механизмов, прессов, штамповочных машин и некоторых металлообрабатывающих станков. Время цикла этого режима $t_{\text{ц}} = t_{\text{р}} + t_0$, где $t_{\text{р}}$ – время работы двигателя, а t_0 – время паузы. Время цикла обычно не превышает десяти минут.

Повторно-кратковременный режим характеризуется продолжительностью включения.

11.1.2. Принципы выбора электродвигателей

Выбор двигателя заключается в подборе для соответствующего механического оборудования электродвигателя, подходящего по роду тока, напряжению, мощности и частоте вращения.

Для машин и механизмов, не требующих регулирования частоты вращения, рекомендуется применять асинхронные

двигатели с короткозамкнутым ротором или синхронные. Двигатели постоянного тока допускается применять только в случаях, когда двигатели переменного тока не удовлетворяют характеристикам механизма или являются неэкономичными. Синхронные двигатели рекомендуется применять для нерегулируемых механизмов продолжительного режима работы при единичной мощности 100 кВт и более.

Современной серией асинхронных двигателей является серия 4А. Двигатели выпускаются в двух вариантах исполнения по степени воздействия окружающей среды: защищенные (1Р23) и закрытые обдуваемые (1Р44).

Двигатели мощностью от 60 до 370 Вт выпускаются на напряжение 220/380 В, двигатели мощностью 0,55–110 кВт – на напряжение 220/380 и 380/660 В, мощностью 132–400 кВт – на напряжение 380/660 В.

Асинхронные двигатели выпускаются следующих типов: 4А, 4АН, 4АК, 4АР и 4АС. Обозначения в типах: 4 – номер серии, А – асинхронный, Н – защищенного исполнения, К – с фазным ротором, Р – с повышенным пусковым моментом и С – с повышенным скольжением.

11.1.3. Определение мощности двигателя. Выбор двигателя по каталогу

Допустимая температура нагрева изоляции электродвигателя и температура окружающей среды определяют значение мощности P_2 на валу двигателя. Температура окружающей среды определена стандартом и составляет 40 °С. Для каждого класса изоляции установлены значения допустимого превышения температуры: А – 60 °С, Е – 75 °С, В – 80 °С, F – 100 °С, H – 125 °С. В каталогах и паспортных данных указана номинальная мощность $P_{\text{ном}}$, соответствующая температуре окружающей среды 40 °С.

Выбор двигателя для продолжительного режима работы производится, исходя из условия $P_{\text{ном}} \geq P$. Если двигатель предназначен для работы в продолжительном режиме при переменной нагрузке, предварительный выбор электродвигателя про-

изводится, исходя из условия $P_{\text{ном}} \geq P_{\text{ср}}$, а затем выполняется проверочный расчет.

Все методы проверки сводятся к условию, что среднее значение мощности потерь в двигателе не должно превышать мощность потерь при номинальной нагрузке $P_{\text{пер}} \leq P_{\text{п. ном}}$. На практике применяют методы, основанные на расчете эквивалентных значений тока, момента, мощности.

Метод эквивалентного тока основан на замене действительного, изменяющегося во времени действующего значения тока двигателя, эквивалентным током, при котором мощность потерь соответствует средним потерям при переменном режиме работы.

Эквивалентное значение тока определяют по формуле

$$I_{\text{экр}} = \sqrt{\frac{I_n^2 t_n + I_1^2 t_1 + I_2^2 t_2 + \dots + I_m^2 t_m}{k_1(t_n + t_m) + t_1 + t_2 + \dots + k_2 t_0}}, \quad (11.4)$$

где I_1, I_2, I_m – значения тока двигателя в интервалах времени t_1, t_2, t_m , соответствующие участкам с неизменной нагрузкой;

$I_{\text{п}}, I_{\text{т}}$ – средние значения тока, соответствующие времени пуска $t_{\text{п}}$ и торможения $t_{\text{т}}$;

t_0 – время паузы;

k_1 – коэффициент, учитывающий уменьшение теплоотдачи при пуске и торможении;

k_2 – коэффициент, учитывающий уменьшение теплоотдачи во время паузы.

Для двигателей постоянного тока $k_1 = 0,75$, а $k_2 = 0,5$; для асинхронных двигателей $k_1 = 0,5$, а $k_2 = 0,25$. Номинальный ток двигателя выбирают из условия $I_{\text{ном}} \geq I_{\text{экр}}$.

Переменная нагрузка может быть задана в виде графической зависимости $M(t)$. В этом случае определяют эквивалентный момент

$$M_{\text{экр}} = \sqrt{\frac{M_{\text{п}}^2 t_n + M_1^2 t_1 + M_2^2 t_2 + \dots + M_{\text{т}}^2 t_{\text{т}}}{k_1(t_n + t_m) + t_1 + t_2 + \dots + k_2 t_0}}, \quad (11.5)$$

где M_{Π} , M_T , M_1 , M_2 и так далее – значения момента на валу двигателя в соответствующие промежутки времени.

Номинальную мощность двигателя выбирают из условия

$$P_{\text{ном}} \geq P_p,$$

где P_p – расчетная мощность.

$$P_p = 0,105 M_{\text{экв}} n_{\text{ном}},$$

где $n_{\text{ном}}$ – номинальная частота вращения двигателя.

Наиболее простым методом выбора двигателя является определение его эквивалентной мощности

$$P_{\text{экв}} = \sqrt{\frac{P_n^2 t_{\Pi} + P_1^2 t_1 + P_2^2 t_2 + \dots + P_m^2 t_m}{k_1(t_n + t_m) + t_1 + t_2 + \dots + k_2 t_0}}, \quad (11.6)$$

где P_{Π} , P_T , P_1 , P_2 и так далее – значения мощности на валу двигателя в соответствующие промежутки времени.

Формулы (11.4)–(11.6) упрощаются, если не учитывать влияние пуска, торможения и работы без нагрузки.

Номинальную мощность двигателя определяют, исходя из условия $P_{\text{ном}} \geq P_p = P_{\text{экв}}$. Этот метод может быть использован при выборе двигателей постоянного тока параллельного возбуждения, асинхронных и синхронных двигателей.

Проверку двигателя по перегрузочной способности производят путем сравнения наибольшего момента нагрузки $M_{\text{нб}}$, определяемого по графику нагрузки, с максимальным моментом двигателя

$$M_{\text{max}} = M_{\text{max}*} \cdot M_{\text{ном}},$$

где $M_{\text{max}*}$ – кратность максимального момента (для двигателей постоянного тока $M_{\text{max}*} = 2 - 2,5$, для асинхронных двигателей – $1,6 - 2,5$).

Необходимо выполнить условие

$$M_{\text{нб}} \leq k_u M_{\text{max}}, \quad (11.7)$$

где k_u – коэффициент, учитывающий снижение напряжения.

При тяжелых условиях пуска проводят также проверку электродвигателя по пусковому моменту. Пусковой момент двигателя

$$M_{\Pi} = M_{\Pi*} M_{\text{НОМ}} \geq M_{\text{ПС}},$$

где $M_{\Pi*}$ – кратность начального пускового момента;

$M_{\text{ПС}}$ – момент сопротивления на валу двигателя при пуске.

Для повторно-кратковременного режима, когда периоды работы чередуются с паузами, при которых двигатель отключается или работает на холостом ходу, номинальная мощность электродвигателя определяется для одного из значений ПВ (15, 25, 40, 60 %).

При многоступенчатом графике нагрузки эквивалентная мощность за период работы определяется по графику нагрузки

$$P_{\text{ЭКВ}} = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^n P_k^2 t_k}{\sum_{k=1}^n t_k}}, \quad (11.8)$$

где P_k – мощность двигателя в промежутке времени t_k ;

n – число ступеней цикла графика нагрузки.

При одноступенчатом графике нагрузки $P_{\text{ЭКВ}} = P$. Продолжительность включения

$$\text{ПВ} = \frac{\sum_{k=1}^n t_k}{\sum_{k=1}^n t_k + t_0} \cdot 100\%, \quad (11.9)$$

где t_0 – время паузы.

При одноступенчатом графике нагрузки

$$\text{ПВ} = \frac{t_p}{t_p + t_0} \cdot 100\%.$$

Мощность двигателя выбирают, исходя из условия

$$P_{\text{НОМ}} \geq P_p = P_{\text{ЭКВ}} \sqrt{\frac{\text{ПВ}}{\text{ПВ}_{\text{СТ}}}},$$

где $P_{В_{ст}}$ – стандартное значение ПВ, указанное в паспорте двигателя.

Коэффициенты k_m – механической перегрузки двигателя в кратковременном режиме при номинальном напряжении и k_T – тепловой перегрузки соответственно равны

$$\left. \begin{aligned} k_m &= P_{кр*} = \frac{P_{кр}}{P_{ном}} = M_* \\ k_T &= P_{кр*}^2 = M_*^2 = \frac{1}{1 - e^{-t_{кр}/T}} \end{aligned} \right\}, \quad (11.10)$$

где $t_{кр}$ – время работы в кратковременном режиме (стандартные длительности периода кратковременной работы 10, 30, 60 и 90 мин);

T – постоянная нагрева двигателя (для асинхронных двигателей защищенного исполнения малой и средней мощности обычно принимают 15–60 мин.).

При кратковременном режиме мощность $P_{кр}$ двигателя, предназначенного для продолжительного режима работы, равна:

$$P_{кр} = P_{ном} \sqrt{k_T}. \quad (11.11)$$

11.1.4. Определение мощности двигателей для некоторых механизмов

Расчетную мощность двигателей выбирают по следующим формулам.

Для металлообрабатывающих станков

$$P_p = \frac{FSv_p}{\eta_c}, \quad (11.12)$$

где F – удельное сопротивление резанию;

S – сечение стружки;

v_p – скорость резания;

η_c – КПД станка.

Для вентиляторов

$$P_p = \frac{Qp}{\eta_v \eta_{\Pi}}, \quad (11.13)$$

где Q – производительность вентилятора;

p – давление газа;

η_v – КПД вентилятора;

η_{Π} – КПД передачи.

Для насосов

$$P_p = \frac{QHv}{\eta_n \eta_{\Pi}}, \quad (11.14)$$

где Q – производительность насоса;

H – дифференциальный напор столба жидкости;

v – плотность жидкости;

η_n – КПД насоса.

Для компрессоров

$$P_p = \frac{QA}{\eta_k \eta_{\Pi}}, \quad (11.15)$$

где Q – производительность компрессора;

A – работа, затрачиваемая на сжатие одного кубического метра газа до необходимого давления;

η_k – КПД компрессора.

Для горизонтальных ленточных транспортеров

$$P_p = \frac{QfL}{\eta_{\Pi}}, \quad (11.16)$$

где Q – производительность транспортера;

f – коэффициент трения;

L – рабочая длина транспортера.

Для подъемных механизмов кранов

$$P_p = \frac{(G + G_0)v}{\eta_{\Pi\text{М}}}, \quad (11.17)$$

где G – масса поднимаемого груза;

G_o – масса захватывающего приспособления;

v – скорость подъема;

$\eta_{\text{пм}}$ – КПД подъемного механизма.

Технические данные асинхронных двигателей приведены в табл. 11.1.

Таблица 11.1

Технические данные асинхронных двигателей
с короткозамкнутым ротором с частотой вращения 1500 об/мин

Тип двигателя	$P_{\text{ном}}$, кВт	$N_{2 \text{ ном}}$, об/мин	$\eta_{\text{ном}}$, %	$\cos \varphi_{\text{ном}}$	M_{max}^*
4A80A4Y3	1,1	1420	75,0	0,81	2,2
4A80B4Y3	1,5	1415	77,0	0,83	2,2
4A90L4Y3	2,2	1425	80,0	0,83	2,4
4A100S4Y3	3,0	1435	82,0	0,83	2,4
4A100L4Y3	4,0	1430	84,0	0,84	2,4
4A112M4Y3	5,5	1445	85,5	0,85	2,2
4A132S4Y3	7,5	1455	87,5	0,86	3,0
4A132M4Y3	11,0	1460	87,5	0,87	3,0
4A160S4Y3	15,0	1465	88,5	0,88	2,3
4A160M4Y3	18,5	1465	89,5	0,88	2,3
4A180S4Y3	22,0	1470	90,0	0,90	2,3
4A180M4Y3	30,0	1470	91,0	0,90	2,3
4A200M4Y3	37,0	1475	91,0	0,90	2,5
4A200L4Y3	45,0	1475	92,0	0,90	2,5
4A225M4Y3	55,0	1480	92,5	0,90	2,5
4A250S4Y3	75,0	1480	93,0	0,90	2,3
4A250M4Y3	90,0	1480	93,0	0,91	2,3

Более подробно технические данные электродвигателей и рекомендации по их выбору приведены в [2].

11.2. Выбор проводов

11.2.1. Выбор марки провода

Провода состоят из проводящей жилы, изоляции и защитного покрова. По материалу проводящей жилы провода бывают медные и алюминиевые. На практике в основном применяются

алюминиевые провода. В марке проводов с алюминиевой жилой присутствует буква «А». Если проводящая жила состоит из большого числа тонких перевитых проволок, то такой провод будет гибким и в марке провода это будет отмечаться буквой «Г».

В качестве изолирующего материала применяют (в скобках указано обозначение данной изоляции в марке провода): резину (Р), наиритовую резину (Н), поливинилхлорид (В), полиэтилен (П). Кроме изолированных проводов для воздушных линий применяют неизолированные (голые) провода, для которых в качестве проводящего материала применяют также и сталь.

Защитные покровы используют для защиты изолирующего материала от механических и химических воздействий. Для защиты применяют оплетку из пряжи, иногда пропитанную лаком, пластмассовые или металлические оболочки.

11.2.2. Выбор сечения провода

Промышленность выпускает провода следующих сечений, мм²: 0,5; 0,75; 1,0; 1,2; 1,5; 2,0; 2,5; 3; 4; 5; 6; 8; 10; 16; 25; 35; 50 и т. д. Выбор сечения осуществляют по трем критериям: по механической прочности ($q_{\text{мх}}$), по току нагрузки (q_i) и по потере напряжения ($q_{\Delta u}$).

11.2.3. Выбор по механической прочности

В зависимости от условий прокладки проводов и материала проводящей жилы в справочных таблицах указаны минимально допустимые сечения проводов с точки зрения механической прочности. Выбранное сечение должно удовлетворять условию $q_{\text{мх}} \geq q_{\text{min}}$.

Для большинства условий прокладки алюминиевых проводов $q_{\text{min}} = 2,5 \text{ мм}^2$, а для медных $q_{\text{min}} = 0,5$ или $0,75 \text{ мм}^2$.

11.2.4. Выбор по току нагрузки

Провода служат для присоединения электроприемников к источнику питания. Ток в проводнике зависит от мощности

электроприемника: чем больше мощность, тем больше ток в проводнике. В проводнике с сопротивлением R при протекании тока I имеет место мощность потерь $I^2 R$, при этом провод и его изоляция нагреваются. Так как мощность потерь зависит от тока и сопротивления провода, а сопротивление зависит от сечения провода, то для провода с конкретным сечением с увеличением тока увеличивается температура нагрева изоляции. Каждый класс изоляции имеет максимально допустимую температуру нагрева, а следовательно, максимально допустимый ток $I_{\text{доп}}$.

В зависимости от сечения провода, материала проводящей жилы, класса изоляции, условий прокладки проводов и числа жил в справочных таблицах приводят допустимые значения токов в проводах (табл. 11.2).

Вычислив расчетный ток I_p в проводе, по таблице находят такое сечение q_i , что бы $I_{\text{доп}} \geq I_p$. Расчетный ток I_p зависит от типа и числа электроприемников, присоединенных к данной линии передачи.

В случае однофазного приемника, присоединенного в конце линии, имеющего электрическую мощность P , расчетный ток находят по формуле

$$I_p = \frac{P}{U_{\phi} \cos \varphi}, \quad (11.18)$$

где U_{ϕ} – фазное напряжение;

$\cos \varphi$ – коэффициент мощности электроприемника.

В случае трехфазного приемника, присоединенного в конце линии, расчетный ток

$$I_p = \frac{P}{\sqrt{3} U_{\text{л}} \cos \varphi}, \quad (11.19)$$

где P – мощность трехфазного приемника;

$U_{\text{л}}$ – линейное напряжение.

Как однофазные, так и трехфазные электроприемники могут быть распределены вдоль одной линии (рис. 11.4), т. е. присоединены к линии передачи в разных точках. В этом случае в формулах (11.18) и (11.19) вместо мощности P надо принимать расчетную мощность P_p

$$P_p = k_c \sum_{i=1}^n P_i, \quad (11.20)$$

где P_i – номинальная мощность i -го электроприемника;
 k_c – коэффициент спроса;
 n – число электроприемников, присоединенных к линии.

Таблица 11.2

Длительно допустимый ток для проводов АПР, АПРТО, АПРВ, АПВ, ПР, ПРТО, ПРГ, ПРВ, ПВ, ПГВ, ПРГВ с резиновой и пластмассовой изоляцией на напряжение до 1 кВ с алюминиевыми (числитель) и медными (знаменатель) жилами при температуре окружающего воздуха 25°C

Сечение провода, мм ²	Допустимый ток $I_{\text{доп}}$, А, в зависимости от способа прокладки					
	открыто	в стальных трубах при числе проводов в трубе				
		2	3	4	5–6	7–8
1,0	–/17	–/16	–/15	–/14	–	–
1,2	–/20	–/18	–/16	–/15	–	–
1,5	–/23	–/19	–/17	–/16	–/15	–/14
2,0	21/26	19/24	18/22	15/20	12/17	11/16
2,5	24/30	20/27	18/25	19/25	15/20	14/19
3	27/34	24/32	22/28	21/26	18/22	17/21
4	32/41	28/38	28/35	23/30	22/28	21/26
5	36/46	32/42	30/39	27/34	24/33	22/28
6	39/50	36/46	32/42	30/40	26/34	24/31
8	46/62	43/54	40/51	37/46	30/40	29/38
10	60/80	50/70	47/60	39/50	38/48	35/45
16	75/100	60/85	60/80	55/75	48/64	45/60
25	105/140	85/115	80/100	70/90	65/80	60/75
35	130/170	100/135	95/125	85/115	75/100	70/95
50	165/215	140/185	130/170	120/150	105/135	95/125
70	210/270	175/225	165/210	140/185	130/165	125/155
95	255/330	215/255	200/255	175/225	–	–

Коэффициент спроса учитывает тот факт, что не все электроприемники могут быть включены одновременно, не все одновременно работают в номинальном режиме, и другие

условия. Для нескольких светильников, присоединенных к линии и включаемых одним выключателем, коэффициент спроса $k_c = 1$. Для линии, питающей светильники ряда помещений, можно принимать $k_c = 0,8-0,9$.

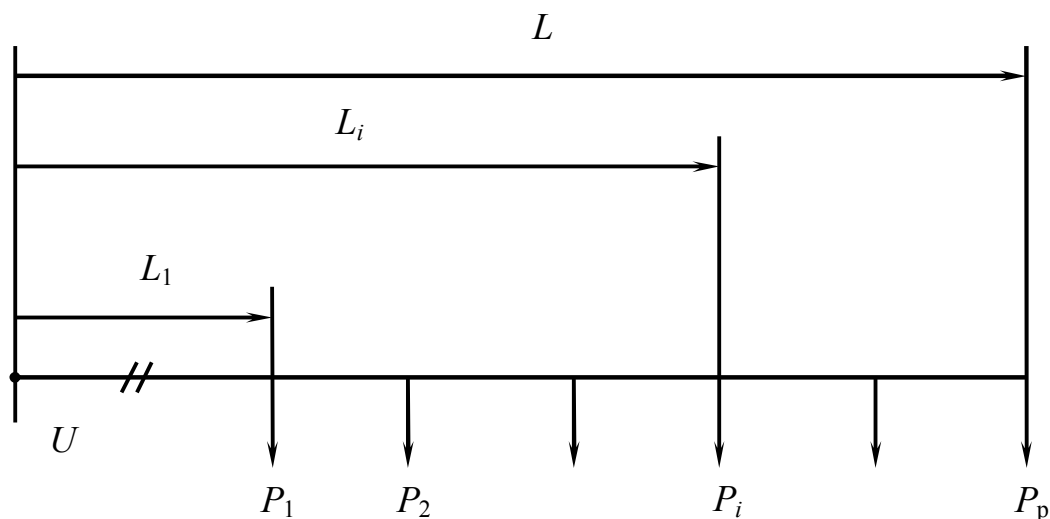


Рис. 11.4. Распределение электропотребителей вдоль линии

В случае присоединения к линии электродвигателей или электротехнологических установок с изменяющейся мощностью в первом приближении можно пользоваться вычисленными коэффициентами зависимости спроса от числа электроприемников:

n	2	3	4	5	6	8	9	10	15	20
k_c	1	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,47	0,44	0,35	0,31

11.2.5. Выбор по потере напряжения

Каждый электроприемник имеет номинальное напряжение, указанное в паспорте. Большинство приемников допускает отклонение напряжения на $\pm 5\%$. Следовательно, в линиях передачи от источника питания до самого удаленного приемника допускается иметь потерю напряжения не более 5%.

Как известно, на участке электрической цепи с током I потеря напряжения равна $\Delta U = I(R \cos \varphi + X \sin \varphi)$, где R и X – активное и индуктивное сопротивления этого участка цепи. В сетях с напряжением до 1 кВ индуктивным сопротивлением пренебрегают и считают, что

$$\Delta U = IR \cos \varphi. \quad (11.21)$$

В случае однофазной нагрузки в конце линии ток находят по (11.18), а сопротивление – по формуле

$$R = \frac{2L}{\gamma q},$$

где L – длина линии, м;

γ – удельная проводимость, $\frac{\text{м}}{\text{ом} \cdot \text{мм}^2}$;

q – сечение провода, мм^2 .

Заменив потерю напряжения ΔU в вольтах на потерю напряжения в процентах $\Delta u = \frac{\Delta U}{U_{\text{ном}}} \cdot 100\%$, получим формулу для определения сечения провода $q_{\Delta U}$, обеспечивающего допустимую потерю напряжения:

– для однофазной нагрузки в конце линии сечение провода определяется выражением

$$q_{\Delta U} \geq \frac{200PL}{\gamma \Delta u U_{\phi}^2}; \quad (11.22)$$

– для однофазных нагрузок, распределенных вдоль линии:

$$q_{\Delta U} \geq \frac{200 \sum_{i=1}^n P_i L_i}{\gamma \Delta u U_{\phi}^2}; \quad (11.23)$$

– для трехфазной нагрузки в конце линии:

$$q_{\Delta U} \geq \frac{100PL}{\gamma \Delta u U_{\text{л}}^2}; \quad (11.24)$$

– для трехфазных нагрузок, распределенных вдоль линии,

$$q_{\Delta U} \geq \frac{100 \sum_{i=1}^n P_i L_i}{\gamma \Delta u U_{\text{л}}^2}. \quad (11.25)$$

В формулах (11.22)–(11.25) следует принимать удельную проводимость алюминиевых и медных проводов соответственно равными 33 и 54 м/(Ом·мм²). Найдя три значения сечения провода, в качестве выбранного сечения $q_{\text{выбр}}$ принимают максимальное из трех ($q_{\text{мх}}$, $q_{\text{в}}$, $q_{\Delta U}$). Выбрав сечение линейных проводов, можно найти действительную потерю напряжения на участке, например,

$$\Delta u_{\text{Д}} = \Delta u \frac{q_{\Delta U}}{q_{\text{выбр}}}. \quad (11.26)$$

В четырехпроводных сетях с заземленной нейтралью проводимость нейтральных проводов должна быть не менее 50 % проводимости линейных проводов.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Атабеков Г. И. Теоретические основы электротехники / Г. И. Атабеков. М.: Энергия, 1978. 592 с.
2. Иванов И. И. Электротехника / И. И. Иванов, А. Ф. Лукин, Г. И. Соловьев. СПб. : Лань, 2002. 192 с.
3. Рекус Г. Г. Общая электротехника и основы промышленной электроники : учебное пособие для вузов / Г. Г. Рекус. М. : Высшая школа, 2008. 654 с.
4. Гоноровский И. С. Радиотехнические цепи и сигналы : учебник для вузов / И. С. Гоноровский. М. : Сов. радио, 1987. 608 с.
5. Попов В. П. Основы теории цепей / В. П. Попов. М. : Высшая школа, 2000. 356 с.
6. Бакалов В. П. Теория электрических цепей / В. П. Бакалов, П. П. Воробиенко, Б. И. Крук. М. : Радио и связь, 2001. 428 с.
7. Блохин А. В. Анализ линейных электрических цепей при гармоническом воздействии / А. В. Блохин, М. П. Трухин. Екатеринбург : УГТУ–УПИ, 2000. 48 с.
8. Рекус Г. Г. Электрооборудование производств / Г. Г. Рекус. М. : Высшая школа, 2005. 426 с.
9. Касаткин А. С. Электротехника / А. С. Касаткин, М. В. Немцов. М. : Высшая школа, 1998. 276 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	3
Глава 1. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ И ИХ СВОЙСТВА	4
1.1. Классификация электрических колебаний	4
1.2. Разложение колебаний в ряд Фурье	6
1.3. Спектры колебаний	8
1.4. Свойства спектров	12
1.4.1. Свойство линейности	13
1.4.2. Сдвиг колебаний во времени	13
1.4.3. Свойства спектров четных и нечетных колебаний	14
1.4.4. Изменение масштаба времени	14
1.4.5. Дифференцирование и интегрирование колебания	15
1.4.6. Произведение колебаний	15
1.5. Временные характеристики колебаний	16
1.6. Случайные колебания	18
Глава 2. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ	23
2.1. Основные понятия и определения	23
2.2. Элементы электрических цепей	26
2.2.1. Сопротивление	26
2.2.2. Индуктивность	28
2.2.3. Емкость	32
2.2.4. Замещение физических элементов идеализированными элементами цепи	35
2.2.5. Источники ЭДС и источники тока	37
2.3. Законы Кирхгофа	41
2.3.1. Первый закон Кирхгофа	41
2.3.2. Второй закон Кирхгофа	42
Глава 3. ЛИНЕЙНЫЕ ЦЕПИ ПРИ ПОСТОЯННОМ ТОКЕ И ПЕРЕМЕННОМ ГАРМОНИЧЕСКОМ ВОЗДЕЙСТВИИ	44
3.1. Гармоническое воздействие	44
3.2. Синусоидальный ток в сопротивлении	49

3.3. Синусоидальный ток в индуктивности	51
3.4. Синусоидальный ток в емкости	53
3.5. Последовательное соединение R, L, C	55
3.6. Параллельное соединение R, L, C	58
3.7. Мощность в цепи синусоидального тока	61
3.8. Представление синусоидальных функций в виде проекции вращающихся векторов	64
3.9. Законы Ома и Кирхгофа в комплексной форме	66
3.9.1. Последовательное соединение R, L, C	66
3.9.2. Параллельное соединение R, L, C	69
3.10. Комплексная форма записи мощности	70
Глава 4. ИНДУКТИВНО СВЯЗАННЫЕ ЦЕПИ	74
4.1. Основные положения и определения	74
4.2. Полярности индуктивно связанных катушек. ЭДС взаимной индукции	76
4.3. Комплексная форма расчета цепи с взаимной индукцией	80
4.4. Коэффициент индуктивной связи. Индуктивность рассеяния	81
4.5. Резонанс в электрических цепях	85
4.5.1. Резонансные (колебательные) цепи	85
4.5.2. Последовательный колебательный контур, резонанс напряжения	86
4.5.3. Параллельный колебательный контур. Резонанс токов	90
Глава 5. МЕТОДЫ РАСЧЕТА СЛОЖНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ	92
5.1. Преобразование схем электрических цепей	92
5.1.1. Последовательное соединение	92
5.1.2. Параллельное соединение	94
5.2. Применение законов Кирхгофа для расчета сложных цепей	96
5.3. Метод контурных токов	98
5.4. Метод узловых напряжений	100
5.5. Метод наложения	103
Глава 6. ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКИ	105
6.1. Основные определения и классификация четырехполюсников	105

6.2. Системы уравнений четырехполюсника	108
6.3. Схемы замещения четырехполюсника	112
Глава 7. ТРЕХФАЗНЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ	114
7.1. Основные понятия и определения	114
7.2. Соединение звездой	115
7.3. Соединение треугольником	118
7.4. Мощность трехфазной цепи	121
Глава 8. ТРАНСФОРМАТОРЫ	122
8.1. Устройство и принцип действия трансформатора	122
8.2. Режим холостого хода трансформатора. Коэффициент трансформации	123
8.3. Рабочий режим трансформатора	125
8.4. Полная схема замещения трансформатора	126
8.5. Трехфазный трансформатор	127
8.6. Автотрансформатор	130
Глава 9. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ДВИГАТЕЛИ	133
9.1. Электрические двигатели постоянного тока	133
9.1.1. Устройство и принцип действия электродвигателей постоянного тока	133
9.1.2. Способы пуска в ход электродвигателей постоянного тока	136
9.1.3. Способы регулирования частоты вращения электродвигателей постоянного тока	138
9.2. Асинхронные трехфазные электрические двигатели	140
9.2.1. Устройство трехфазных асинхронных электрических двигателей	140
9.2.2. Принцип действия трехфазного асинхронного электродвигателя	143
9.2.3. Схема замещения ротора трехфазного асинхронного электродвигателя	144
9.2.4. Рабочие характеристики трехфазного асинхронного электродвигателя	146
9.3. Синхронные трехфазные электрические двигатели	149
9.3.1. Устройство и принцип действия трехфазных синхронных электродвигателей	149
9.3.2. Способы пуска в ход трехфазных синхронных электродвигателей	151

Глава 10. НЕЛИНЕЙНЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ	155
10.1. Аппроксимация нелинейных характеристик	155
10.2. Воздействие гармонических колебаний на нелинейные элементы	158
10.3. Практическое использование	161
Глава 11. ВЫБОР ЭЛЕКТРОДВИГАТЕЛЕЙ И ПРОВОДОВ	163
11.1. Выбор электродвигателей	163
11.1.1. Основные сведения об электроприводе и режимах работы электродвигателей	163
11.1.2. Принципы выбора электродвигателей	166
11.1.3. Определение мощности двигателя. Выбор двигателя по каталогу	167
11.1.4. Определение мощности двигателей для некоторых механизмов	171
11.2. Выбор проводов	173
11.2.1. Выбор марки провода	173
11.2.2. Выбор сечения провода	174
11.2.3. Выбор по механической прочности	174
11.2.4. Выбор по току нагрузки	174
11.2.5. Выбор по потере напряжения	177
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК	180

